NOTAS PARA EL CURSO DE MÉTODOS MATEMÁTICOS.

Jazmín Adriana Juárez Ramírez

1 Series de Fourier

1.1 Funciones Periódicas

Definición. Una función $f(x)$ es periódica si existe una constante positiva $T > 0$ tal que

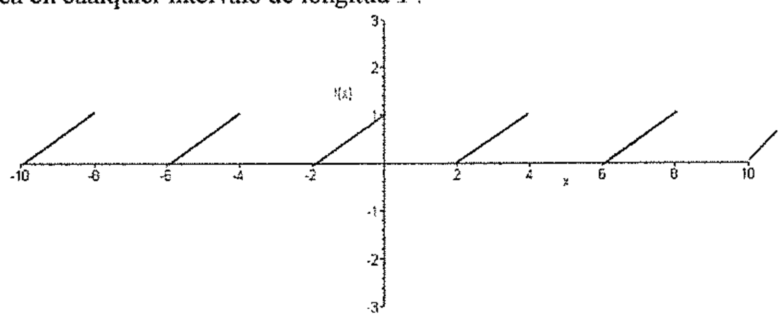
$$f(x+T) = f(x) \tag{1}$$

para cualquier x en el dominio de definición de $f(x)$.

El número positivo T se llama periodo de $f(x)$. Las funciones periódicas son comunes en los problemas de la física y la ingeniería.

Las funciones periódicas más comunes son las trigonométricas $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, etc.

Una función formada por la suma, resta, producto o cociente entre dos funciones de periodo T también es una función periódica con periodo T. La gráfica de una función periódica se define mediante la repetición periódica de si gráfica en cualquier intervalo de longitud T.



Una propiedad importante de cualquier función $f(x)$ con periodo T es la siguiente:

Si $f(x)$ es integrable en cualquier intervalo de longitud T, entonces es integrable en cualquier otro intervalo de la misma longitud, y el valor de la integral es el mismo

$$\boxed{\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx}$$

Este resultado lo podemos obtener de las propiedades de la integral

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^{a+T} f(x)dx \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)dx \\
&= \int_b^{b+T} f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)dx
\end{aligned}$$

Observemos que el último sumando puede expresarse de la siguiente manera:

Sea

$$y = x - T \quad \Rightarrow \quad dy = dx$$

$$y(b+T) = b + T - T = b \qquad y(a+T) = a + T - T = a$$

Entonces

$$\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx = \int_b^a f(y+T)dy = \int_b^a f(y)dy = \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Y así obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^{b+T} f(x)dx &= \int_b^{b+T} f(x)dx + \int_b^a f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \\
&= \int_b^{b+T} f(x)dx
\end{aligned}$$

Si T es un periodo de la función $f(x)$, entonces los números $2T$, $3T$, $4T$, ... también son periodos

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = f(x+4T) = \cdots$$

También son válidas las siguientes igualdades

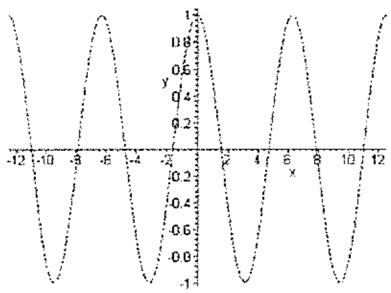
$$f(x) = f(x-T) = f(x-2T) = f(x-3T) = f(x-4T) = \cdots$$

Y se pueden obtener aplicando repetidamente la definición (1). Entonces, si T es un periodo, también lo es nT, donde n es un número entero positivo, esto es, si existe un periodo, éste no es único. En general $f(x) = f(x + nT)$.

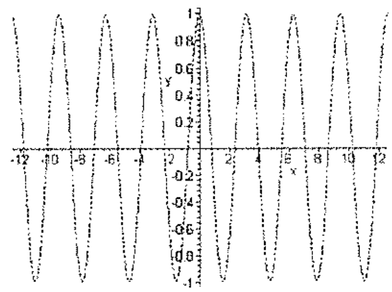
Como ejemplo, grafiquemos las siguientes funciones trigonométricas de periodo mínimo 2π

$$\cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x$$

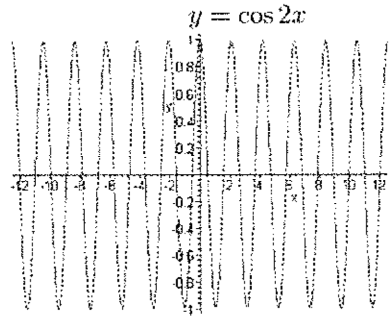
$$\operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} 2x,\ \operatorname{sen} 3x$$



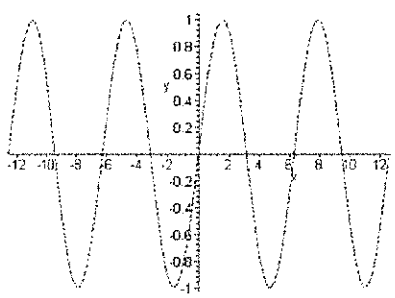
$y = \cos x$



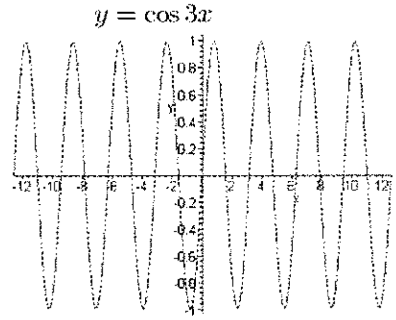
$y = \cos 2x$



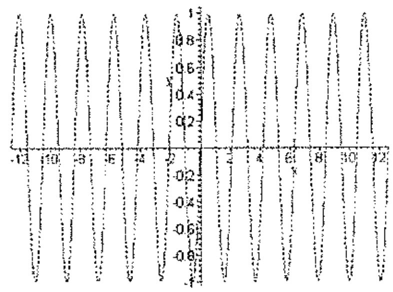
$y = \cos 3x$



$y = senx$



$y = sen2x$



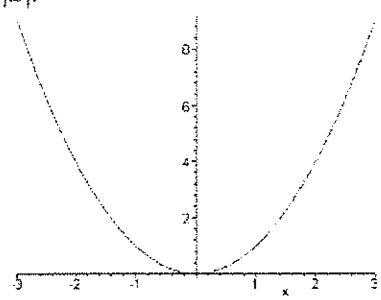
$$y = sen3x$$

Definición: Se dice que la función $g(x)$ es par si

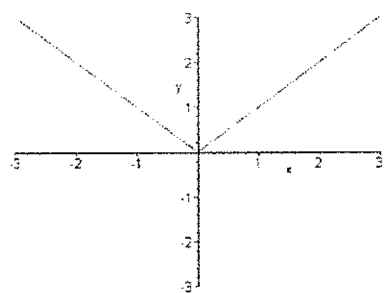
$$g(-x) = g(x)$$

para toda x.

La gráfica de una función tal es simétrica con respecto al eje y. Ejemplos de funciones pares son $\cos x$, x^2, $|x|$.



$y = x^2$



$y = |x|$

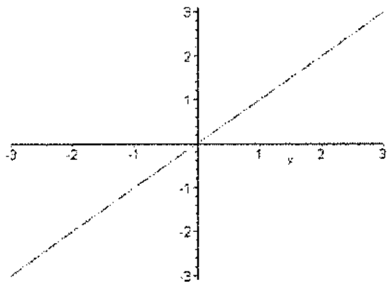
Definición: Se dice que una función $h(x)$ es impar si

$$h(-x) = -h(x)$$

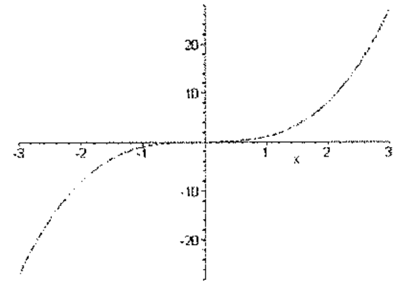
para toda x.

La gráfica de una función impar desde $-L$ hasta cero es la reflexión sobre el eje y y después sobre el eje x de la gráfica de cero a L.

Ejemplos de funciones impares son $\operatorname{sen} x$, x, x^3, etc.



$y = x$



$y = x^3$

La mayoría de las funciones no son pares ni impares. Por ejemplo, e^x y $x^2 - x$ no son pares ni impares. Sin embargo, el producto de dos funciones pares o impares es par y el producto de una función par y una impar es impar. Se cumple que:

1. Si $h(-x) = -h(x)$ y $g(-x) = -g(x)$, entonces
$$h(-x)g(-x) = h(x)g(x)$$
2. Si $f(-x) = f(x)$ y $u(-x) = u(x)$, entonces
$$f(-x)u(-x) = f(x)u(x)$$
3. Si $h(-x) = -h(x)$ y $f(-x) = f(x)$, entonces$h(-x)f(-x) = -f(x)g(x)$
$$h(-x)f(-x) = -f(x)g(x)$$

Si $f(x)$ es una función par, entonces

$$\boxed{\int_{-T}^{T} f(x)dx = 2\int_{0}^{T} f(x)dx}$$

Demostración:

$$\int_{-T}^{T} f(x)dx = \int_{-T}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx$$

Para $\int_{-T}^{0} f(x)dx$ tenemos: sea $y = -x$; $\quad dy = -dx$

$$y(-T) = T \qquad y(0) = 0$$

es decir

$$\int_{-T}^{0} f(x)dx = \int_{T}^{0} f(-y)(-dy) = -\int_{T}^{0} f(y)dy = \int_{0}^{T} f(y)dy$$

entonces

$$\int_{-T}^{T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx$$

$$\int_{-T}^{T} f(x)dx = 2\int_{0}^{T} f(x)dx$$

Si $h(x)$ es una función impar, tenemos

$$\boxed{\int_{-T}^{T} h(x)dx = 0}$$

Demostración:

$$\int_{-T}^{T} h(x)dx = \int_{-T}^{0} h(x)dx + \int_{0}^{T} h(x)dx$$

Para $\int_{-T}^{0} h(x)dx$ tenemos: sea $y = -x; \quad dy = -dx$

$$y(-T) = T \qquad y(0) = 0$$

es decir

$$\int_{-T}^{0} h(x)dx = \int_{T}^{0} h(-y)(-dy) = -\int_{T}^{0} h(-y)(dy) = \int_{T}^{0} h(y)(dy) = -\int_{0}^{T} h(x)dx$$

entonces

$$\int_{-T}^{T} h(x)dx = \int_{-T}^{0} h(x)dx - \int_{0}^{T} h(x)dx$$

$$\int_{-T}^{T} h(x)dx = 0$$

Estaremos trabajando con el siguiente sistema trigonométrico básico

$$1,\ \cos x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos 2x,\ \operatorname{sen} 2x,\ \cos 3x,\ \operatorname{sen} 3x,\ \cos 4x,\ \operatorname{sen} 4x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \operatorname{sen} nx,\ \ldots \tag{2}$$

Todas estas funciones tienen el periodo 2π (sin embargo $\cos nx$ y $\operatorname{sen} nx$ tienen el periodo más pequeño igual a $\frac{2\pi}{n}$).

Las siguientes integrales trigonométricas referentes al sistema (2) son importantes y aparecen con frecuencia en el estudio de las series y la transformada de Fourier.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx dx &= 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \pi \qquad \frac{1}{2}(1+\cos 2nx) \\
\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx dx &= \pi \qquad \frac{1}{2}(1-\cos 2nx) \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= 0 \qquad n \neq m \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \\
\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx dx &= 0 \qquad n \neq m \\
\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} nx dx &= 0 \\
\operatorname{sen}\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]
\end{aligned}$$

De lo anterior decimos que la integral sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ del producto de cualesquiera dos diferentes funciones del sistema (2) es cero.

Definición: Diremos que dos funciones $u(x)$ y $\Psi(x)$ son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ si

$$\boxed{\int_a^b u(x)\Psi(x)dx=0} \tag{3}$$

Con esta definición, podemos decir que las funciones del sistema (2) son ortogonales en el intervalo $[-\pi, \pi]$, o más simplemente que el sistema (3) es ortogonal sobre $[-\pi, \pi]$.

Puesto que la integral de una función periódica es la misma sobre cualquier intervalo de longitud igual al periodo, tenemos que las integrales antes calculadas son válidas no solamente en $[-\pi, \pi]$ sino también sobre cualquier intervalo de longitud 2π; $[a, a+2\pi]$ y por consiguiente el sistema (2) es ortogonal sobre cualquier intervalo.

1.2 Funciones con periodo 2π

Supongamos que $f(x)$ es una función periódica con periodo 2π, la cual puede representarse mediante una serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

La determinación de a_0 se lleva acabo integrando dicha expresión en un periodo $[-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)\right]dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum b_n \operatorname{sen} nx dx\end{aligned}$$

intercambiando el orden de la sumatoria y la integral, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= a_0\pi + \sum a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \sum b_n \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx dx \\ &= a_0\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$$

Para obtener a_k, multiplicamos por $\cos kx$ e integramos de $-\pi$ a π

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi}(\sum a_n \cos nx \cos kx)dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum b_n \operatorname{sen} nx \cos kx\right)dx \\ &= \sum a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx dx + \sum b_n \operatorname{sen} nx \cos kx dx \\ &= a_k\pi\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx}$$

Y para obtener b_k, multiplicamos por $\operatorname{sen} kx$ e integramos de $-\pi$ a π

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} (\sum a_n \cos nx \operatorname{sen} kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum b_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx\right) dx \\
&= \sum a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} kx dx + \sum b_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx dx \\
&= b_k \pi
\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx}$$

Las integrales que nos dan los coeficientes a_0, b_n, y a_n se llaman fórmulas de Euler

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \qquad \text{(Frmulas de Euler)} \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx
\end{aligned}$$

Dada una función periódica $f(x)$ con periodo 2π, pueden calcularse los coeficientes a_n y b_n mediante las funciones de Euler y formar la serie trigonométrica

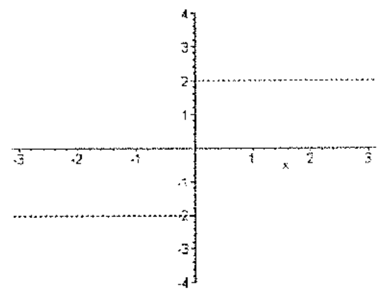
$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 + \cdots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \cdots$$

llamada Serie de Fourier correspondiente a $f(x)$ y sus coeficientes, obtenidos anteriormente, se llaman coeficientes de Fourier de $f(x)$.

Ejemplo.

1. Hallar los coeficientes de Fourier de la función periódica $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} -K \text{ si } -\pi < x < 0 \\ K \text{ si } 0 < x < \pi \end{array} \right\} \qquad f(x + 2\pi) = f(x) \qquad K \in \Re^+$$



Cálculo de los coeficientes:

En el intervalo $[-\pi, \pi]$ la función toma dos valores.

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} (-K)\,dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} K dx;$

$a_0 = -\frac{K}{\pi}(\pi) + \frac{K}{\pi}(\pi) = 0;$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int\limits_{-\pi}^{0} (-K) \cos nx dx + \int\limits_{0}^{\pi} K \cos nx dx \right];$

$a_n = 0.$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = -\frac{K}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} nx dx + \frac{K}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \operatorname{sen} nx dx;$

$b_n = \frac{K}{n\pi} \cos nx|_{-\pi}^{0} - \frac{K}{n\pi} \cos nx|_{0}^{\pi} = \frac{K}{n\pi} [1 - \cos n(-\pi) - \cos n\pi + 1];$

$b_n = \frac{K}{n\pi} [2 - 2\cos n\pi] = \frac{2K}{n\pi} [1 - \cos n\pi].$

Si $n = 2m \to b_n = 0$. Si $m = 2n - 1$, tenemos $b_n = \frac{4K}{n\pi}$

Por lo tanto $b_{2n-1} = \frac{4K}{(2n-1)\pi}$

$b_1 = \frac{4K}{\pi}; \qquad b_2 = 0; \qquad b_3 = \frac{4K}{3\pi}; \qquad b_4 = 0; \qquad b_5 = \frac{4K}{5\pi}; \qquad \cdots$

Entonces, la Serie de Fourier de $f(x)$ es

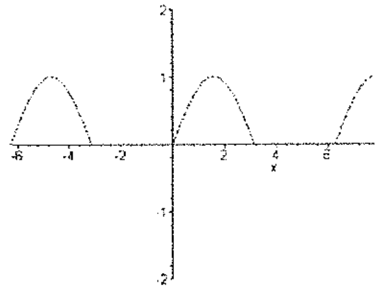
$$\frac{4K}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + \cdots \right)$$

Las sumas parciales son:

$S_1 = \frac{4K}{\pi} \operatorname{sen} x; \qquad S_2 = \frac{4K}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \right); \qquad$ etc...

2. Hacer un expansión en series de Fourier de la función definida en un periodo por

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -\pi \le t \le 0 \\ sent & 0 \le t \le \pi \end{array} \right\} \quad T = 2\pi$$



Cálculo de los coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} sentdt = -\frac{1}{2\pi}\cos t\,|_0^\pi = -\frac{1}{2\pi}(-1-1) = \frac{1}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sen(nt)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)t}{2(n+1)}\,|_0^\pi - \frac{\cos(1-n)t}{2(1-n)}\,|_0^\pi\right]$$

evaluando

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2(-1)^n}{n^2-1} - \frac{2}{n^2-1}\right]$$

$$a_n = -\frac{1}{(n^2-1)\pi}\left[(-1)^n+1\right] = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ para n impar} \\ -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1} \text{ para n par} \end{array}\right\} n \neq 1.$$

Hay que calcular $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sent\cos tdt = \frac{1}{\pi}\frac{sen^2 t}{2}\,|_0^\pi = 0.$

Luego

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sen\,(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sentsen(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{sen(n-1)t}{2(n-1)}\,|_0^\pi - \frac{sen(n+1)t}{2(n+1)}\,|_0^\pi\right] = 0.$$

Calculando b_1

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sen^2 tdt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2}\,|_0^\pi - \frac{sen2t}{4}\,|_0^\pi\right] = \frac{1}{2}.$$

La función $f(t)$ se expresa como

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}\cos nt + \frac{1}{2}sent \qquad \text{para n par}$$

Escribiendo algunos términos

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}sent - \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{15}\cos 4t + \frac{1}{35}\cos 6t + ...\right]$$

Ejercicios: Encuentra los coeficientes de Fourier de las siguientes funciones

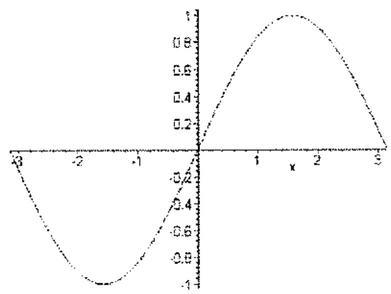
1. $f(x) = \left\{\begin{array}{c} 1 \text{ si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 \text{ si } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{array}\right\}$

2. $f(x) = \left\{\begin{array}{c} 1 \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ si } \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \end{array}\right\}$

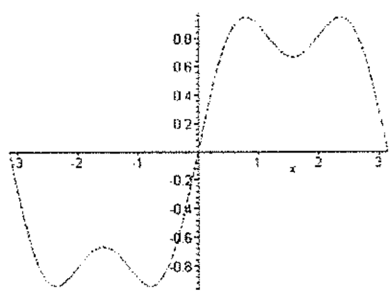
3. $f(x) = \left\{\begin{array}{c} -1 \text{ si } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1 \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ si } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{array}\right\}$

Consideremos la expansión $f(x) = \frac{4K}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots\right)$ que se encontró en el primer ejemplo. Mostremos las gráficas de algunos términos de la serie (tomando $4k/\pi = 1$)

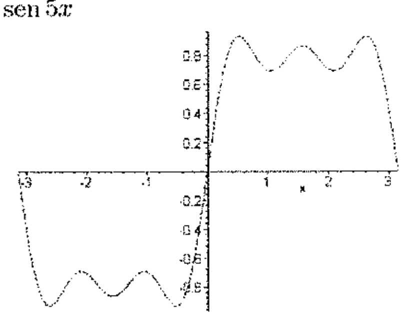
1) $f(x) = \operatorname{sen} x$



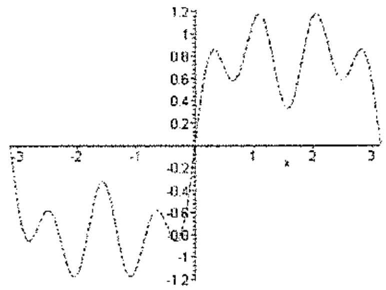
2) $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$



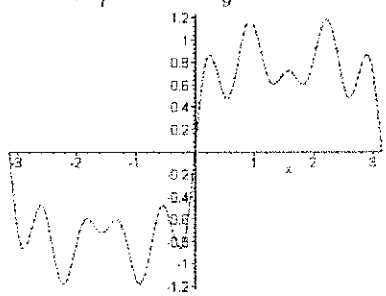
3) $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x$



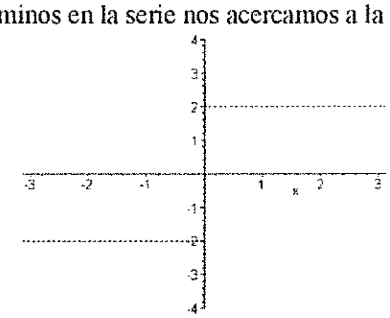
4) $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x$



5) $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x + \frac{1}{9}\operatorname{sen} 9x$



Obsevamos que al tomar más términos en la serie nos acercamos a la gráfica:



1.3 Condiciones de Dirichlet

Seguramente ya ha surgido la pregunta ¿Todas las funciones pueden ser expandidas en series de Fourier?, las condiciones que una función $f(x)$ debe cumplir para poder ser representada por una Serie de Fourier reciben el nombre de condiciones de Dirichlet.

Antes de escribir tales condiciones, recordaremos lo que se entiende por función continua por tramos o seccionalmente continua.

Definición: Si $f(x)$ es una función continua en todos los puntos de un intervalo acotado $a \leq x \leq b$, excepto posiblemente para cada uno de los elementos de algún conjunto finito de puntos $a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b$, donde $a \leq x \leq x_1$, $x_1 \leq x \leq x_2$, ..., $x_{n-1} \leq x \leq b$, tal que para cada subintervalo $a \leq x \leq x_1$, $x_1 \leq x \leq x_2$, ..., $x_{n-1} \leq x \leq b$ $f(x)$ es continua y tiene límite finito cuando x tiende hacia cualquiera de los puntos extremos del intervalo de subdivisión, desde el inferior, se dice que $f(x)$ es una funcin continua por tramos o seccionalmente continua.

Debemos recalcar que es necesario que existan los límites laterales $f(a^-)$, $f(x_1^-)$, $f(x_2^+)$, ..., $f(b^-)$, donde $f(x_0^+)$ es el límite lateral por la derecha

$$f\left(x_0^+\right) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h)$$

y $f\left(x_0^-\right)$ es el límite lateral por la izquierda

$$f\left(x_0^-\right) = \lim_{h \to 0} f(x_0 - h)$$

Por ejemplo:

Una función $f(x)$ es continua por tramos, si es continua en el intervalo abierto $a \leq x \leq b$, sin embargo, no es seccionalmente continua, si $f(a^+)$ o $f(b^-)$ no existe.

La integral de una función seccionalmente continua es la suma de las integrales sobre los asubintervalos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx$$

Las anteriores consideraciones nos permiten escribir las condiciones de Dirichlet que debe cumplir una función $f(x)$ para poder ser representada por una serie de Fourier.

Las condiciones de Dirichlet son:

1. La función $f(x)$ es continua por tramos o seccionalmente continua.
2. La integral del valor absoluto de $f(x)$ en un periodo se limita, es decir

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|\,dx \leq \infty$$

En un punto de discontinuidad, la serie de Fourier converge a $\frac{1}{2}\left[f\left(x_0^-\right)+f\left(x_0^+\right)\right]$

1.4 Funciones con periodo arbitrario

Si $f(t)$ es una función periódica dependiente del tiempo, con periodo T, llamaremos $\frac{2\pi}{T}$ la frecuencia fundamental ω_0 del sistema expresada en radianes por unidad de tiempo.

Su representación en serie de Fourier es la siguiente

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right]$$

Para expresar esta función de periodo arbitrario T a partir de la función $f(x)$ con periodo 2π que hemos estado manejando, efectuamos el cambio de variable

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2\pi}{T}t=\omega_{0t} \quad\Rightarrow\quad t=\frac{T}{2\pi}x;\quad t(\pi)=\frac{T}{2};t(-\pi)=-\frac{T}{2}\\
f(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx\right]\qquad dx=\frac{2\pi}{T}dt\\
f(t) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right]
\end{aligned}$$

y los coeficientes a_0, a_n y b_n toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\frac{2\pi}{T}dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n\omega_0 t\frac{2\pi}{T}dt\\
&= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t dt\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\operatorname{sen} nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_0 t\frac{2\pi}{T}dt\\
&= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t dt
\end{aligned}$$

Observemos el siguiente hecho que nos servirá en el cálculo de los coeficientes de Fourier y que nos facilitará el trabajo.

Si $f(x)$ es par, entonces el producto $f(t)\cos n\omega_0 t$ es una función par y el producto $f(t)\,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t t$ es una función impar, entonces de las propiedades que ya vimos para las integrales en límites simétricos de funciónes pares e impares se tiene que

$\int_{-T}^{T} f(x)\cos\omega_0 t dt = 2\int_{0}^{T} f(x)\cos\omega_0 t dt$ y $\int_{-T}^{T} f(x)\, sen\omega_0 t dt = 0$

concluimos que si una función es par en su expansión no hay coeficientes b_n.

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t}.$$

Análogamente si $f(x)$ es impar entonces el producto $f(t)\cos n\omega_0 t$ es una función impar y el producto $f(t)\,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t$ es una función par entonces

$\int_{-T}^{T} f(x)\cos\omega_0 t dt = 0$ y $\int_{-T}^{T} f(x)\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t dt = 2\int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t dt$

para una función impar la expansión en series de Fourier no contiene coeficientes a_n.

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t}.$$

Ejemplos:

1. $f_1(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -2 < t < -1 \\ 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{array} \right\} \qquad f(t+4) = f(t)$

   Esta función es par por lo tanto los coefientes $b_n = 0$.

   $a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dt = \frac{1}{4}t\,|_{-1}^{1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

   $a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{L}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{2n\pi t}{L}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right) sent\frac{n\pi}{2}t\,|_{-1}^{1} = \frac{1}{n\pi}\left(sent\frac{n\pi}{2} - sent\frac{(-n\pi)}{2}\right)$;

   y como sen(-x)= -senx, entonces

   $\mathrm{a}_n = \frac{2}{n\pi} sent\frac{n\pi}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ para n par} \\ -\frac{2}{n\pi} \text{ o } \frac{2}{n\pi} \text{ para n impar} \end{array} \right\}$.

   La serie asociada a $f_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} sent\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}t$;

   Escribiendo algunos términos

   $f_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}t - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi}{2}t + ...\right]$

2. $f_2(t) = t \qquad -1 < t < 1$;Esta función es impar con periodo L = 2.

   Los coeficientes a_0 y a_n son cero.

$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t) sen\frac{2n\pi t}{2}dt = \int_{-1}^{1} t sen\,(n\pi)\, t dt = \left(\frac{sen(n\pi)t}{(n\pi)^2} - \frac{t\cos n\pi t}{n\pi}\right)\Big|_{-1}^{1};$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi - \frac{1}{n\pi}\cos(-n\pi) = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n.$$

Por tanto

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\,(n\pi)\, t;$$

$$f(t)=-\frac{2}{\pi}\left(sen\pi t + \frac{1}{2}sen 2\pi t - \frac{1}{3}sen 3\pi t + \frac{1}{4}sen 4\pi t + ...\right)$$

3. $f_3(t) = t + 1, \qquad si -2 < t < 2$ y tal que $f(t+4) = f(t)$

Esta función no presenta simetría por tanto hay que calcular los coeficientes a_n y b_n.

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(t+1)\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{2}+2-\frac{4}{2}+2\right] = 1;$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{4}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(t+1)\cos\frac{2n\pi t}{4}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t\cos\frac{n\pi t}{2}dt + \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\cos\frac{n\pi t}{2}dt;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\frac{n\pi}{2}t}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} + \frac{t sen\frac{n\pi}{2}t}{\frac{n\pi}{2}}\right]\Big|_{-2}^{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)} sen\frac{n\pi}{2}t\,\Big|_{-2}^{2} = \frac{4}{2}\left[\frac{\cos\frac{n\pi}{2}(2)}{n^2\pi^2} - \frac{\cos\frac{n\pi}{2}(-2)}{n^2\pi^2}\right] = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t) sen\frac{2n\pi t}{4}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(t+1)\,sen\frac{2n\pi t}{4}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t sen\frac{n\pi t}{2}dt + \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} sen\frac{n\pi t}{2}dt;$$

la segunda integral es cero, así

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\frac{sen\frac{n\pi}{2}t}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} - \frac{t\cos\frac{n\pi}{2}t}{\frac{n\pi}{2}}\right]\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{2\cos n\pi}{\frac{n\pi}{2}} - \frac{2\cos(-n\pi)}{\frac{n\pi}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{4\cos n\pi}{\frac{n\pi}{2}}\right];$$

$$b_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\left[-4\cos n\pi\right] = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1};$$

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\frac{n\pi}{2}t;$$

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(sen\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{2}sen\pi t + \frac{1}{3}sen\frac{3\pi}{2} + ...\right);$$

Ejercicios: Encontrar la serie de Fourier de las siguientes funciones:

1. $f(t) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & -2 < t < -1 \\ 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{array}\right\} \quad T = 4$

2. $f(t) = \left\{\begin{array}{cc} -1 & -1 < t < 0 \\ 2t & 0 < t < 1 \end{array}\right\} \quad T = 2$

3. $f(t) = \text{sen}\,\pi t \quad (0 < t < 1) \quad T = 1$

1.5 Serie de Fourier compleja.

Puesto que la serie de Fourier está expresada en términos de la base trigonométrica

$$1,\ \cos\omega_0 t,\ \text{sen}\,\omega_0 t,\ \cos 2\omega_0 t,\ \text{sen}\,2\omega_0 t,\ ...$$

y de acuerdo con la fórmula de Euler

$$e^{\pm in\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i \operatorname{sen}\omega_0 t$$

podemos expresar tanto el $\operatorname{sen}\omega_0 t$ como el $\cos\omega_0 t$ en forma compleja de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\cos n\omega_0 t &= \frac{1}{2}\left(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}\right) \\
\operatorname{sen} n\omega_0 t &= \frac{1}{2i}\left(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}\right)
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t &= a_n \frac{1}{2}\left(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}\right) - b_n \frac{i}{2}\left(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) e^{in\omega_0 t} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) e^{-in\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Llamando

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \\
C_{-n} &= \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right)
\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t &= C_n e^{in\omega_0 t} + C_{-n} e^{-in\omega_0 t} \\
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-in\omega_0 t} \\
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{in\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Si $C_0 = \frac{1}{2}a_0$ tenemos

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}}$$

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-in\omega_0 t} dt \\
C_{-n} &= \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{in\omega_0 t} dt
\end{aligned}$$

y en general

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-in\omega_0 t} dt} \qquad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

1.6 Ortogonalidad de funciones complejas

Para fuinciones complejas, el concepto de ortogonalidad puede ser modificado. Las funciones complejas $u(t)$ y $\psi(t)$ son ortogonales en el intervalo $a \le t \le b$ si

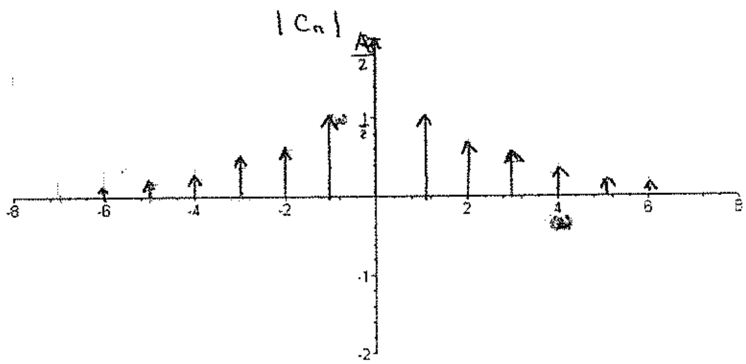
$$\int\limits_a^b u(t)\, \psi(t)\, dt = 0$$

Demostrar que el conjunto de funciones complejas de la serie de Fourier $\{e^{in\omega_0 t}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ obedece la condición de ortogonalidad para $n \neq m$ en el intervalo $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$, donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Ejercicios:

Calcular la serie compleja de Fourier para la función $f(t)$ definida por:

1. $f(t) = -\frac{1}{T}t + \frac{1}{2}$ para $0 < t < T$ y $f(t+T) = f(t)$
   Graficar $|C_n|$ vs ω
   $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
   $C_n = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(-\frac{1}{T}t + \frac{1}{2}\right) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T -\frac{1}{T} t e^{-in\omega_0 t} dt + \frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{1}{2} e^{-in\omega_0 t} dt$
   $C_n = -\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T t e^{-in\omega_0 t} dt + \frac{1}{2T}\int\limits_0^T e^{-in\omega_0 t} dt = -\frac{1}{T^2}\left[\frac{e^{-in\omega_0 t}}{(-in\omega_0)}\left(t - \frac{1}{(-in\omega_0)}\right)\Big|_0^T\right] + \frac{1}{2T}\frac{e^{-in\omega_0 t}}{(-in\omega_0)}\Big|_0^T$
   $C_n = -\frac{1}{T^2}\left[\frac{e^{-in\omega_0 t}}{(-in\omega_0)}\left(T - \frac{1}{(-in\omega_0)}\right) + \frac{1}{(-in\omega_0)^2}\right] + \frac{1}{2T}\left[\frac{e^{-in\omega_0 T}}{(-in\omega_0)} - \frac{1}{(-in\omega_0)}\right]$
   $C_n = -\frac{1}{T}\frac{e^{-in\omega_0 T}}{(-in\omega_0)} + \frac{e^{-in\omega_0 T}}{T^2(-in\omega_0)^2} - \frac{1}{T^2}\frac{1}{(-in\omega_0)^2} + \frac{1}{2T}\frac{e^{-in\omega_0 T}}{(-in\omega_0)} - \frac{1}{2T}\frac{1}{(-in\omega_0)}$
   $e^{-in\omega_0 T} = e^{-i2n\pi} = \cos 2n\pi - 2\,\mathrm{sen}\, 2n\pi = 1$
   $C_n = -\frac{1}{T}\left(-\frac{1}{in\omega_0}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{(in\frac{2\pi}{T})}\right) = -\frac{i}{2n\pi} \qquad n \neq 0$
   $C_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(-\frac{1}{T}t + \frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T t\,dt + \frac{1}{2T}\int\limits_0^T dt = -\frac{1}{T^2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^T + \frac{1}{2T}t\Big|_0^T = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
   $C_0 = 0$; $C_n = -\frac{i}{2n\pi} \qquad n \neq 0$
   $f(t) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-in\omega_0 t}$
   $|C_n| = \frac{1}{2n\pi}$



2. $f(t) = \frac{A_0}{T}t, \qquad f(t) = f(t+T)$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A_0}{T} t e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{A_0}{T^2}\int_0^T t e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{A_0}{T^2}\frac{e^{-in\omega_0 t}}{(-in\omega_0)}\left(T + \frac{1}{in\omega_0}\right)\Big|_0^T$$

$$C_n = \frac{A_0}{T^2}\left[\frac{e^{-in\omega_0}}{(-in\omega_0)}\left(T + \frac{1}{in\omega_0}\right) - \frac{1}{(-in\omega_0)}\right] = \frac{A_0}{T}\frac{e^{-in\omega_0 T}}{(-in\omega_0)}$$

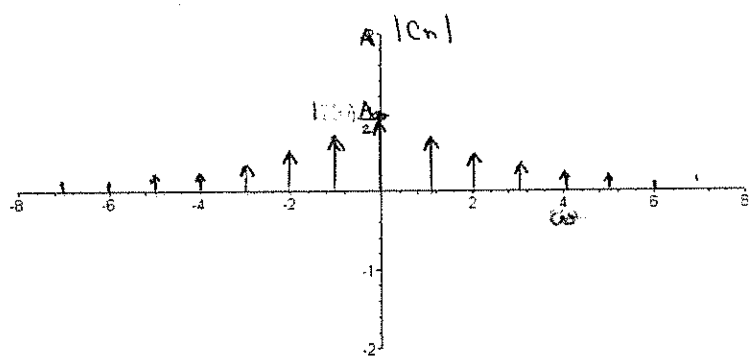
$$e^{-in\omega_0 t} = \cos 2n\pi - \operatorname{sen} 2n\pi = 1$$

$$C_n = \frac{A_0}{T}\frac{1}{(-in\omega_0)}; \qquad C_n = \frac{A_0}{T}\frac{1}{n\omega_0^2}; \qquad n \neq 0$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A_0}{T} t dt = \frac{A_0}{T^2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^T = \frac{A_0}{2}$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_0}{T}\frac{1}{n\omega_0}e^{-in\omega_0 t}$$

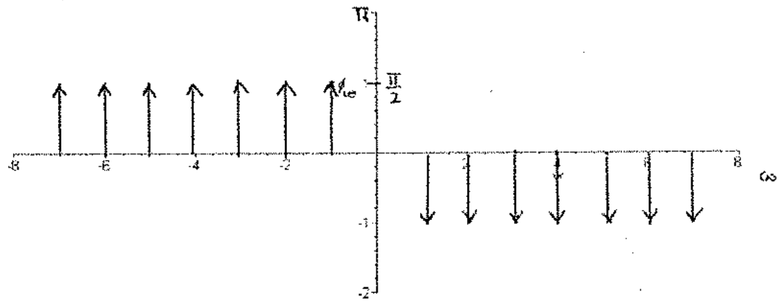
$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{iA_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-in\omega_0 t}}{n}$$



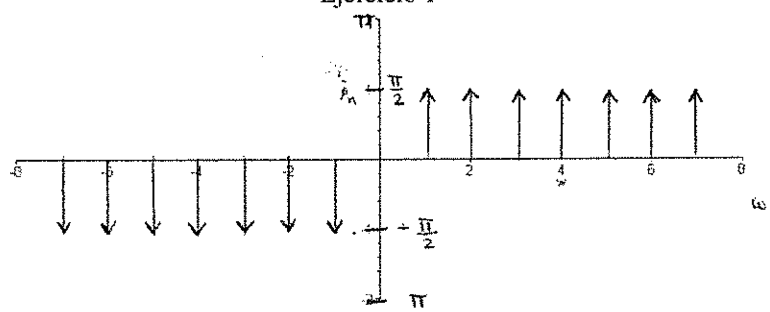
La gráfica de la magnitud de los coeficientes complejos C_n vs ω se denomina Espectro de Amplitud de la función $f(t)$.

La gráfica de ϕ_n vs $n\omega_0$ es llamada Espectro de Fase, donde $\phi_n = \tan^{-1}\frac{-b_n}{a_n}$

Por lo tanto las gráficas anteriores son los espectros de amplitud y acontinuación mostraremos los espectros de fase (tomemos $T = 1s$).



Ejercicio 1



Ejercicio 2

2. Transformada de Fourier

2.1. Paso de la serie a la transformada de Fourier.

Si $f(t)$ es periódica con periodo T la representación en series de Fourier compleja es:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ y $C_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$

Pero para calcular C_n podríamos utilizar cualquier otra variable

$$C_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-in\omega_0 u} du$$

Sustituyendo en la representación en Series de $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-in\omega_0 u} du \right] e^{in\omega_0 t}$$

Si T se hace grande, la cantidad $\Delta\omega$ definida por $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ se hace pequeña

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-in\Delta\omega u} du \right] e^{in\Delta\omega t} \Delta\omega$$

Si $T \rightarrow \infty$; $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ y los armónicos discretos $n\omega_0$ se convierten en una variable continua ω, $n\omega_0 = n\Delta\omega \rightarrow \omega$ y la suma discreta $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}$ se convierte en la suma continua $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$

En el límite:

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right] e^{i\omega t} d\omega$$

volviendo a la variable t en la integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right]e^{i\omega t}d\omega$$

que tiene la forma

$$\boxed{\mathrm{f(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega}$$

donde $F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ es llamada la Transformada de Fourier.

Ejemplo:

Sea $f(t) = \left\{\begin{array}{ll} V, & -\frac{d}{2} \leq t \leq \frac{d}{2} \\ 0, & t < -\frac{d}{2},\ t > \frac{d}{2} \end{array}\right\}$

Calcular la Transformada de Fourier de $f(t)$.

De la definición de transformada de Fourier para una función se tiene:

$\Im\{f(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$\Im\{f(t)\} = \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} Ve^{-i\omega t}dt = -\frac{V}{i\omega}e^{-i\omega t}\ |_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$

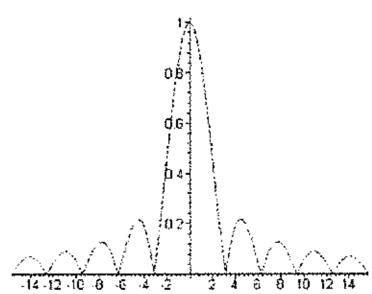
$\Im\{f(t)\} = -\frac{v}{i\omega}\left[e^{-i\omega\frac{d}{2}} - e^{i\omega\frac{d}{2}}\right] = \frac{2V}{\omega}\left[\frac{e^{-i\omega\frac{d}{2}} - e^{i\omega\frac{d}{2}}}{2i}\right]$

$\Im\{f(t)\} = \frac{2V}{\omega}\operatorname{sen}\frac{\omega d}{2} = \frac{2Vd}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega d}{2}}{\frac{\omega d}{2}}$

$F(\omega) = Vd\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega d}{2}}{\frac{\omega d}{2}}$

Esta funcion es de la forma $y = A\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Si graficamos $|F(\omega)|$ vs ω tendremos



Esta gráfica es continua (recordar $|C_n|$ vs $n\omega_0$) y es el espectro de amplitud.

Ejercicios:

1. Encontrar la transfromada de Fourier de los pulsos

a) $f_1(t) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{A}{T} & -T < t < 0 \\ -\frac{A}{T} & 0 < t < T \end{array} \right\}$ b) $f_2(t) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{A}{T}t + A & -T < t < 0 \\ -\frac{A}{T}t + A & 0 < t < T \end{array} \right\}$

a)$F_1(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}dt = \int\limits_{-T}^{0} \frac{A}{T}e^{-i\omega t}dt + \int\limits_{0}^{T} -\frac{A}{T}e^{-i\omega t}dt$

$F_1(\omega) = \frac{A}{T}\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)}|_{-T}^{0} - \frac{A}{T}\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)}|_{0}^{T} = \frac{A}{T}(\frac{1}{-i\omega})\left[1 - e^{i\omega T}\right] - \frac{A}{T}(\frac{1}{-i\omega})\left[e^{i\omega T} - 1\right]$

$F_1(\omega) = \frac{A}{T}\left[\left(\frac{1}{(-i\omega)}\right)\left(2 - (e^{i\omega T} + e^{-i\omega T})\right)\right]$

$F_1(\omega) = \frac{A}{T}\left[\frac{1}{(-i\omega)}(2 - 2\cos\omega T)\right] = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{(-i\omega)}(1 - \cos\omega T)$

Recordemos que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ por tanto

$F_1(\omega) = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{(-i\omega)} 2\operatorname{sen}^2 \frac{\omega T}{2}$

$$F_1(\omega) = \frac{4A}{\omega T} i \operatorname{sen}^2 \frac{\omega T}{2}$$

b) $F_2(\omega) = \int\limits_{-T}^{0} \left(-\frac{A}{T}t + A\right) e^{-i\omega t}dt + \int\limits_{0}^{T} \left(\frac{A}{T}t + A\right) e^{-i\omega t}dt;$

$F_2(\omega) = \left[\int\limits_{-T}^{0} te^{-i\omega t}dt - \int\limits_{0}^{T} te^{-i\omega t}dt\right] + A\left[\int\limits_{-T}^{0} e^{-i\omega t}dt + \int\limits_{0}^{T} e^{i\omega t}dt\right];$

Recordemos:

$$\int xe^{ax}dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$$

Integrando:

$F_2(\omega) = \frac{A}{T}\left[\left(\frac{ite^{-i\omega t}}{\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}\right)|_{-T}^{0} - \left(\frac{ite^{-i\omega t}}{\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}\right)|_{0}^{T}\right] + A\left[\frac{ie^{-i\omega t}}{\omega}|_{-T}^{T}\right];$

Evaluando

$F_2(\omega) = \frac{A}{T}\left[\frac{i}{\omega^2} + \frac{iTe^{i\omega T}}{\omega} - \frac{e^{i\omega T}}{\omega^2}\right] - \frac{A}{T}\left[-\frac{i}{\omega^2} + \frac{iTe^{i\omega T}}{\omega} + \frac{e^{i\omega T}}{\omega^2}\right] + \frac{iA}{\omega}\left[e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\right];$

Reduciendo términos semejantes

$F_2(\omega) = \frac{A}{\omega^2 T} + \frac{A}{\omega^2 T} - \frac{Ae^{i\omega T}}{T\omega^2} - \frac{Ae^{-i\omega T}}{T\omega^2} = \frac{A}{T\omega^2}\left[2 - \left(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}\right)\right];$

$F_2(\omega) = \frac{A}{T\omega^2}[2 - 2\cos\omega T] = \frac{2A}{T\omega^2}[1 - \cos\omega T];$

De la relación entre las funciones trigonométricas del ángulo doble tenemos que:

$F_2(\omega) = \frac{A}{T\omega^2}\left[4\operatorname{sen}^2 \frac{\omega T}{2}\right]$

$$F_2(\omega) = AT\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}$$

que es de la forma $y = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$;

Como ejercicio se deja graficar esta función.

2.2. Propiedades de la transformada de Fourier

1) Linealidad

Si α y β son números reales

$$\boxed{\Im\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)}$$

suponiendo que las transformadas de Fourier existen. Análogamente

$$\boxed{\Im^{-1}\{\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)\}=\alpha\Im^{-1}\{F(\omega)\}+\beta\Im^{-1}\{G(\omega)\}}$$

2) Corrimiento en el tiempo

Si $\Im\{f(t)\}=F(\omega)$, entonces $\boxed{\Im\{f(t-t_0)\}=e^{-i\omega t_0}F(\omega)}$

Esto es, la transformada de Fourier de la traslación de $f(t)$ por t_0 se obtiene multiplicando la

transformada de Fourier de $f(t)$ por $e^{-i\omega t_0}$. Este resultado es similar al corrimiento en la variable

tiempo con la transformada de Laplace.

Demostración:

$$\Im\{f(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t_0)e^{-i\omega t}dt$$

$$\Im\{f(t-t_0)\}=e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}dt$$

Haciendo $x=t-t_0$;

$$\Im\{f(t-t_0)\}=e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

como x es una variable muda, entonces la integral es la transformada de f(t), por lo tanto

$$\Im\{f(t-t_0)\}=e^{-i\omega t_0}F(\omega)$$

3) Corrimiento en la frecuencia

Si $\Im\{f(t)\}=F(\omega)$,entonces $\boxed{\Im\{f(t)e^{-i\omega_0 t}\}=F(\omega-\omega_0)}$

Demostración:

$$\Im\left\{f(t)e^{-i\omega_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt;$$

$$\Im\left\{f(t)e^{-i\omega_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt;$$

Si se toma $\omega - \omega_0 = z$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt = F(z) = F(\omega-\omega_0).;$$

4) Escalamiento

Si $\Im\{f(t)\} = F(\omega)$ y a es una constante distinta de cero, entonces

$$\boxed{\Im\{f(at)\}=\tfrac{1}{|a|}F(\omega)}$$

El teorema de escalamiento señala un hecho interesante acerca de las señales o de las funciones en general. Aquellas funciones que cambian rápidamente, tales como la función delta de dirac o la función escalón de Heaviside, contienen un espectro ancho de frecuencias especialmente altas, mientras que las funciones suaves contienen una banda estrecha de frecuencias.

5)Inversión del tiempo

Si $\Im\{f(t)\} = F(\omega)$,entonces $\boxed{\Im\{f(-t)\} = F(-\omega)}$, esta conclusión se sigue de la propiedad de escala tomando a = -1.

6) Simetría

Si $\Im\{f(t)\} = F(\omega)$, entonces $\boxed{\Im\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)}$. Esto es, si reemplazamos ω en la

transformada de Fourier F, formando $F(t)$, la transformada de Fourier de esta función es 2π por la

función original con t reemplazada por $-\omega$.

Demostración:

De la definición de transformada inversa

$$f(t) = \Im^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega;$$

cambiando de nombre a la variable ω digamos x

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx;$$

multiplicando ambos términos por 2π, e intercambiando t por $-\omega$

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ix\omega} dx$$

Esta integral es la transformada de una función F en la variable x que podemos cambiar por t

$$\boxed{2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-ixt} dt = \Im \{F(t)\}}$$

7) Modulación

Si $\Im \{f(t)\} = F(\omega)$, entonces

$$\boxed{\Im \{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]}$$

$$\boxed{\Im \{f(t) sen\omega_0 t\} = \frac{i}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]}$$

Demostración:

Utilizando la propiedad del corrimiento en la frecuencia (3) junto con la formula de Euler para las

funciones seno y coseno, se tiene

$\Im \{f(t) \cos \omega_0 t\} = \Im \left\{ f(t) \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right\} = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$

8) Derivación respecto a la variable tiempo

Sea n un entero positivo. Supongamos que $f^{(n)}$ es continua a tramos en todo intervalo $[-a, a]$ y que $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f^{(n-1)}(t) \right| dt$ converge. Supongamos que

$$\lim_{t \to \infty} f^{(k)}(t) = \lim_{t \to -\infty} f^{(k)}(t) = 0$$

para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Por último sea $\Im \{f(t)\} = F(\omega)$. Entonces

$$\boxed{\Im \left\{ f^{(n)}(t) \right\} = (i\omega)^n F(\omega)}$$

En particular, $\Im \{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$ y $\Im \{f''(t)\} = -\omega^2 F(\omega)$.

Demostracion: Probaremos el teorema para el caso $n = 1$. El resultado general, puede probarse por inducción matemática. Las hipótesis del teorema aseguran la existencia de la transformada de Fourier de f'. Integramos por partes para obtener

$$\Im\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}dt \qquad \left[dv = f'(t)\, dt,\ u = e^{-i\omega t}\right]$$

$$= f\left(te^{-i\omega t}\right)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(-i\omega)\, e^{-i\omega t}dt$$

Como $f(0) = f$, tenemos por hipótesis que

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$$

Además,

$$\left|e^{-i\omega t}\right| = |\cos\omega t - i\,\text{sen}\,\omega t| = 1$$

para todo real ω y t. Por lo tanto

$$f(t)\, e^{-i\omega t}|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

y la integración por partes nos lleva a

$$\Im\{f'(t)\} = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt = i\omega F(\omega)$$

como queríamos demostrar.

Si f tiene una discontinuidad que ocurre con frecuencia en las aplicaciones deben añadirse términos a la fórmula.

2.3. Función de Heaviside

Una función importante en el estudio de la transformada de Fourier es la función de Heaviside. Muchas funciones discontinuas pueden ser escritas en términos de la función de Heaviside.

La función de Heaviside se define como:

$$H(t-a)=\left\{\begin{array}{cc} 0 & t<a \\ 1 & t>a \end{array}\right\}$$

Por ejemplo la función $g(t)=\left\{\begin{array}{cc} 0 & t<0 \\ e^{-\alpha t} & t\geq 0 \end{array}\right\}$ puede escribirse en términos de la función de Heaviside. Entonces $g(t)=H(t)\,e^{-\alpha t}$.

Calculemos la transformada de la función de Heaviside:

$\Im\{H(t-a)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(t-a)\,e^{-i\omega t}dt=\int\limits_{a}^{\infty} e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}|_{a}^{\infty}=\frac{e^{-i\omega a}}{i\omega};$

Si a $=0$, entonces $\Im\{H(t)\}=\frac{1}{i\omega}=-\frac{i}{\omega}$.

Ejercicios:

1. Calcula la transformada de Fourier de $H(t)\,e^{-\alpha t}$

2. Encuentre la Transformada de Fourier para las siguientes funciones utilizando las propiedades de la transformada de Fourier

   1. $f(t)=5\left[H(t-3)-H(t-1)\right]$

      $\Im\{f(t)\}=\Im\{5\left[H(t-3)-H(t-1)\right]\}$

      $\Im\{f(t)\}=5\Im\{H(t-3)\}-5\Im\{H(t-1)\}$

      $\Im\{f(t)\}=5\int\limits_{3}^{\infty} e^{-i\omega t}dt-5\int\limits_{1}^{\infty} e^{-i\omega t}dt=\frac{5e^{-i\omega t}}{-i\omega}|_{3}^{\infty}-\frac{5e^{-i\omega t}}{-i\omega}|_{1}^{\infty}$

      $\Im\{f(t)\}=5\left[\frac{e^{-3i\omega}}{i\omega}-\frac{e^{-1i\omega}}{i\omega}\right]$

      $\Im\{f(t)\}=\frac{5}{\omega}e^{-7i\omega}\left[\frac{e^{4i\omega}-e^{-4i\omega}}{i}\right]$

      $$\Im\{f(t)\}=\frac{10}{\omega}e^{-7i\omega}\operatorname{sen}4\omega$$

   2. $\Im(t)=\left\{\begin{array}{cc} \operatorname{sen}t & -k\leq t\leq k \\ 0 & |t|>k \end{array}\right\}$

      $\Im\{f(t)\}=\int\limits_{-k}^{k}\operatorname{sen}t e^{-i\omega t}dt=\frac{e^{-i\omega t}}{1-\omega^2}\left(-i\omega\operatorname{sen}t-\cos t\right)|_{-k}^{k}$

      $\Im\{f(t)\}=\frac{e^{-i\omega k}}{1-\omega^2}\left(i\omega\operatorname{sen}k-\cos k\right)-\frac{e^{i\omega k}}{1-\omega^2}\left(-i\omega\operatorname{sen}(-k)-\cos k\right)$

      $\Im\{f(t)\}=\frac{-i\omega}{1-\omega^2}\operatorname{sen}k\left(e^{-i\omega k}+e^{i\omega k}\right)+\frac{\cos k}{1-\omega^2}\left(\frac{-e^{-i\omega k}+e^{i\omega k}}{2i}\right)$

      $$\Im\{f(t)\}=\frac{-2i\omega}{1-\omega^2}\operatorname{sen}k\cos\omega k+\frac{2i}{1-\omega^2}\cos k\operatorname{sen}\omega k$$

3. $f(t) = 5e^{-3(t-5)^2}$

$\Im\{f(t)\} = \Im\left\{5e^{-3(t-5)^2}\right\} = 5\Im\left\{e^{-3(t-5)}\right\} = 5e^{i\omega 5}\Im\left\{e^{-3t^2}\right\}$

$\Im\{f(t)\} =$

$$5e^{-5i\omega}\sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\omega^2/12}$$

En este ejercicio se observa que hay corrimiento en el tiempo $\left(e^{-3(t-5)^2}\right)$ y se usa el resultado $F\left\{e^{-at^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\omega^2/4a}$

$F\left\{\frac{1}{a^2+t^2}\right\} =?$

$g(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$; $G(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$

$f(t) = \frac{1}{2a}e^{-a|t|}$

4. $f(t) = 3H(t-2)e^{-3t}$

$\omega_0 = -3$

$\Im\{f(t)\} = 3\Im\{H(t-2)\}|_{\omega\to\omega+3}$

$$\Im\{f(t)\} = \frac{3e^{-2i\omega}}{i\omega}|_{\omega\to\omega+3} = \frac{3e^{-2i(\omega+3)}}{i(\omega+3)}$$

5. $f(t) = 4H(t-3)e^{-2t}$

$\omega_0 = -2$

$\Im\{f(t)\} = 4\Im\{H(t-3)\}|_{\omega\to\omega+2}$

$$\Im\{f(t)\} = \frac{4e^{-3i\omega}}{i\omega}|_{\omega\to\omega+2} = \frac{4e^{i(\omega+2)}}{i(\omega+2)}$$

6. $f(t) = k[H(t-a) - H(t-b)]$; $a < b$

$\Im\{f(t)\} = k\Im\{[H(t-a) - H(t-b)]\} = k\Im\{H(t-a)\} - k\Im\{H(t-b)\}$

$\Im\{f(t)\} = \frac{ke^{-i\omega a}}{-i\omega} - \frac{ke^{-i\omega b}}{-i\omega}$

$$\Im\{f(t)\} = \frac{ik}{\omega}\left[e^{-i\omega a} - e^{-i\omega a}\right]$$

7. $f(t) = 8e^{-at^2}\operatorname{sen} 3t$

$\Im\{f(t)\} = 8\Im\left\{e^{-2t^2}\operatorname{sen} 3t\right\} = 8\frac{i}{2}\left[\Im\left\{e^{-2t^2}\right\}|_{\omega+3} - \Im\left\{e^{-2t^2}\right\}|_{\omega-3}\right]$

$\Im\{f(t)\} = 4i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega^2}{8}}|_{\omega+3} - 4i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega^2}{8}}|_{\omega-3}$

$$\Im\{f(t)\} = 4i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[e^{-\frac{(\omega+3)^2}{8}} - e^{-\frac{(\omega-3)^2}{8}}\right]$$

8. $f(t) = 3e^{-4|t|}\cos 2t$

$\Im\{f(t)\} = 3\Im\left\{e^{-4|t|}\cos 2t\right\} = \frac{3}{2}\left[\Im\left\{e^{-4|t|}\right\}|_{\omega+2} - \Im\left\{e^{-4|t|}\right\}|_{\omega-2}\right]$

$\Im\{f(t)\} = \frac{3}{2}\left[\frac{8}{16+\omega^2}|_{\omega+2} - \frac{8}{\omega^2+16}|_{\omega-2}\right]$

$$\Im\{f(t)\} = 12\left[\frac{1}{16+(\omega+2)^2} - \frac{1}{16+(\omega-2)^2}\right]$$

9. $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$\Im\{f(t)\} = \Im\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\} = \frac{1}{2}\Im\left\{\frac{2}{1+t^2}\right\} = \frac{2\pi}{2}\Im(-\omega)$

$$F\{f(t)\} = \pi e^{|-\omega|}$$

10. $f(t) = \frac{\operatorname{sen} 3t}{4+t^2}$

$\Im\{f(t)\} = \Im\left\{\frac{\operatorname{sen} 3t}{4+t^2}\right\}$

$$\Im\{f(t)\} = \frac{i}{2}\left[\Im\left\{\frac{1}{4+t^2}\right\}|_{\omega-3} + \Im\left\{\frac{1}{4+t^2}\right\}|_{\omega+3}\right]$$

Recordemos que $\Im\left\{e^{-2|t|}\right\} = \frac{4}{4+\omega^2}$

Entonces:

$\Im\left\{\frac{\operatorname{sen} 3t}{4+t^2}\right\} = \frac{i\pi}{4}\left[e^{-2|-\omega|}|_{\omega-3} + e^{-2|-\omega|}|_{\omega+3}\right] =$

$$\Im\{f(t)\} = \frac{\pi i}{4}\left[e^{-2|-\omega+3|} + e^{-2|-\omega-3|}\right]$$

11. $f(t) = \frac{1}{t^2+6t+13}$

$\Im\{f(t)\} = \Im\left\{\frac{1}{t^2+6t+13}\right\} = \Im\left\{\frac{1}{t^2+6t+9+4}\right\} =$

$\Im\left\{\frac{1}{(t+3)^2+4}\right\} = e^{3i\omega}\Im\left\{\frac{1}{t^2+4}\right\}$

$$\Im\{f(t)\} = \frac{e^{-3i\omega}}{4}2\pi e^{-2|-\omega|}$$

2.4. Teorema de Parseval

Supóngase que $f(t)$ representa ya sea el voltaje o la corriente en un resistor de 1Ω de tal forma que $f^2(t)$ es la potencia instantánea entregda por $f(t)$ al resistor de 1Ω $\left(P = iv = \frac{v^2}{R}\right)$

Integrando esta potencia sobre el tiempo, se obtiene la energía total entregada por $f(t)$ al resistor de 1Ω

$$\begin{aligned}
W_{1\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt \\
f(t) &= \Im^{-1}\{g(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega \\
W_{1\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega\right]dt \\
W_{1\Omega} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{i\omega t}f(t)\,dt\right]d\omega
\end{aligned}$$

Si $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt$
entonces

$$g(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt \qquad \text{y} \qquad g(-\omega) = g^*(\omega)$$

$$\begin{aligned}
W_{1\Omega} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}dt\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,g^*(\omega)\,d\omega \\
W_{1\Omega} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2\,d\omega
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2\,d\omega} \qquad \text{(Teorema de Parseval)}$$

La energía asociada a $f(t)$ puede obtenerse ya sea por medio de una integración de $f^2(t)$ en el dominio del tiempo, o bien, por $\frac{1}{2\pi}$ veces la integral $|g(\omega)|^2$ en el dominio de la frecuencia.

$\boxed{|g(\omega)|^2}$ *Espectro de energía o función densidad de energía espectral de* $f(t)$

2.5. Convolución

Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones, tales que $h(t) = f(t)g(t)$ entonces si

$$\Im\{f(t)\} = F(\omega) \quad y \quad \Im\{g(t)\} = G(\omega)$$

se cumple que

$$\boxed{\Im^{-1}\{F(\omega)G(\omega)\} = f(t) * g(t)} \qquad \text{(Convolución en el tiempo)}$$

$$\boxed{\Im\{f(t)g(t)\} = F(\omega) * G(\omega)} \qquad \text{(Convolución en la frecuencia)}$$

La convolución entre dos funciones se define como
$f(t) * g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$
Ejemplos:

1. $\Im^{-1}\left\{\frac{1}{(1+i\omega)^2}\right\} = \Im^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}\cdot\frac{1}{1+i\omega}\right\}$

   En este caso $F(\omega) = G(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$;$f(t) = g(t) = H(t)e^{-t}$;

   $\Im^{-1}\left\{\frac{1}{(1+i\omega)^2}\right\} = H(t)e^{-t} * H(t)e^{-t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\lambda)e^{-\lambda}H(t-\lambda)e^{-(t-\lambda)}d\lambda;$

   $\Im^{-1}\left\{\frac{1}{(1+i\omega)^2}\right\} = e^{-t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\lambda)\,H(t-\lambda)d\lambda;$

   Averigüemos cuánto vale el producto $H(\lambda)\,H(t-\lambda)$:

   $H(\lambda) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \lambda < 0 \\ 1 & \lambda > 0 \end{array}\right\} \quad H(t-\lambda) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & t < \lambda \\ 1 & t > \lambda \end{array}\right\}$

   Por tanto

   $H(\lambda)\,H(t-\lambda) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \lambda < 0 \text{ ó } \lambda > t \\ 1 & 0 < \lambda < t \end{array}\right\};$

   entonces $\Im^{-1}\left\{\frac{1}{(1+i\omega)^2}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} e^{-t}\int\limits_0^t d\lambda, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{array}\right\} = e^{-t}H(t)\int\limits_0^t d\lambda;$

   finalmente

$$\Im^{-1}\left\{\frac{1}{(1+i\omega)^2}\right\} = te^{-t}H(t)$$

2. $\Im^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}3\omega}{\omega(2+i\omega)}\right\} = \frac{1}{2i}\Im^{-1}\left\{\frac{e^{3i\omega}-e^{-3i\omega}}{\omega(2+i\omega)}\right\} = \frac{1}{2i}\Im^{-1}\left\{\frac{e^{3i\omega}}{\omega(2+i\omega)}\right\} - \frac{1}{2i}\Im^{-1}\left\{\frac{e^{-3i\omega}}{\omega(2+i\omega)}\right\}$

Aplicando la propiedad de corrimiento en el tiempo:

$\Im^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}3\omega}{\omega(2+i\omega)}\right\} = \frac{1}{2i}\Im^{-1}\left\{\frac{1}{\omega(2+i\omega)}\right\}|_{t\to t+3} - \frac{1}{2i}\Im^{-1}\left\{\frac{1}{\omega(2+i\omega)}\right\}|_{t\to t-3}$

Y por lo tanto sólo tenemos que calcular $\Im^{-1}\left\{\frac{1}{\omega(2+i\omega)}\right\}$

Aplicando convolución:

$\Im^{-1}\left\{\frac{1}{\omega(2+i\omega)}\right\} = \Im^{-1}\left\{\frac{1}{\omega}\right\} * \Im^{-1}\left\{\frac{1}{2+i\omega}\right\} = iH(t) * H(t)\,e^{-2t}$

$\Im^{-1}\left\{\frac{1}{\omega(2+i\omega)}\right\} = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\lambda)\,H(t-\lambda)\,e^{-2(t-\lambda)}d\lambda = ie^{-2t}H(t)\int\limits_{0}^{t} e^{2\lambda}d\lambda$

$\Im^{-1}\left\{\frac{1}{\omega(2+i\omega)}\right\} = \frac{i}{2}H(t)\left(1-e^{-2t}\right)$

Finalmente $\Im^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}3\omega}{\omega(2+i\omega)}\right\} = \frac{1}{2i}\left[\frac{i}{2}H(t)\left(1-e^{-2t}\right)|_{t\to t+3} - \frac{i}{2}H(t)\left(1-e^{-2t}\right)|_{t\to t-3}\right]$

$$\Im^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}3\omega}{\omega(2+i\omega)}\right\} = \frac{1}{4}\left[H(t+3)\left(1-e^{-2(t+3)}\right) - H(t-3)\left(1-e^{-2(t-3)}\right)\right]$$

2.6. Función de Muestreo

Sea una función $f(t) = H(t+a) - H(t-a)$. Calculemos la transformada de esta función, recordando la transformada de la función de Heaviside:

$\Im\{f(t)\} = \Im\{H(t+a) - H(t-a)\} = \Im\{H(t+a)\} - \Im\{H(t-a)\}$

$\Im\{f(t)\} = \frac{e^{i\omega a}}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega a}}{i\omega} = \frac{2}{\omega}\left[\frac{e^{i\omega a}-e^{-i\omega a}}{2i}\right] = \frac{2}{\omega}\operatorname{sen}\omega a = 2a\left(\frac{\operatorname{sen}\omega a}{\omega a}\right)$

Esta función es la función muestreo o Sampling.

$$\frac{\operatorname{sen}\omega a}{\omega a} = \operatorname{Sa}(\omega a)$$

Ejemplos:

Calcular la transformada inversa de las siguientes funciones:

1. $\Im^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\omega-2)}{\omega-2}\right\} = e^{2it}\Im^{-1}\{\operatorname{Sa}(\omega)\} = \frac{e^{2it}}{2}\left[H(t+1) - H(t-1)\right]$

2. $\Im^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}{\omega}\right\} = \frac{1}{2}\Im^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right\} = \frac{1}{2}\Im^{-1}\left\{\operatorname{Sa}\frac{\omega}{2}\right\} = \frac{1}{8}\left[H\left(t+\frac{1}{2}\right) - H\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]$

Ejercicio:

1. $\Im^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}3\omega}{\omega(2+i\omega)}\right\}$

Este ejercicio ya se realizó utilizando el teorema de convolución.

2.7. Función impulso o delta

Consideremos la función escalón o de heaviside

$u(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{array} \right\} \qquad u(-t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & t > 0 \\ 1 & t < 0 \end{array} \right\}$

Sumando estas funciones se tiene $u(t) + u(-t) = 1$, excepto en $t = 0$; calculando la transformada de esta función:

$\Im\{u(t)\} + \Im\{u(-t)\} = \Im\{1\};$

$g(\omega) + g(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

Se supone $g(\omega) = k\delta(\omega) + B(\omega)$. Entonces

$$\begin{aligned} g(-\omega) &= k\delta(-\omega) + B(-\omega) \\ g(-\omega) &= k\delta(\omega) + B(-\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\omega) + g(-\omega) &= 2k\delta(\omega) + B(\omega) + B(-\omega) \\ &= 2\pi\delta(\omega) \\ B(\omega) &= -B(-\omega) \quad B \text{ es una función impar} \end{aligned}$$

$$\boxed{u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)}$$

$$\begin{aligned} \Im\{u(t)\} &= i\omega g(\omega) = 2\omega\left[\pi\delta(\omega) + B(\omega)\right] = 1 \\ &= i\pi\omega\delta(\omega) + i\omega B(\omega) \\ 1 &= i\omega B(\omega) \\ B &= \frac{1}{i\omega} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Im\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}}$$

(Transformada de la funcin escaln en trminos de la delta)

Por tanto, podemos calcular la transformada de la siguiente función:

$$\operatorname{sgn} t = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & t < 0 \\ -1 & t > 0 \end{array} \right\}$$

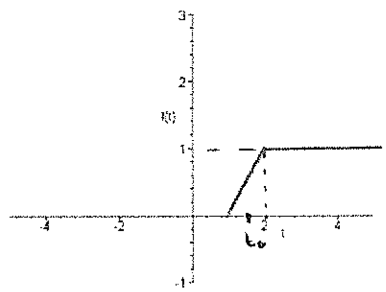
$$\boxed{\Im\{\operatorname{sgn} t\} = \frac{2}{i\omega}}$$

Consideremos la función excitación escalón unitario $u(t-t_0) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{array}\right\}$

Si se aplica un voltaje $u(t-t_0)$ a un capacitor $\left(i = C\frac{dv}{dt}\right)$ se observa que para

$$\begin{aligned} t &< t_0 \; i(t) = 0 \\ t &> t_0 \; i(t) = 0 \end{aligned}$$

Hay que obtener $u'(t-t_0)\,|_{t=t_0}$ mediante un proceso al límite.

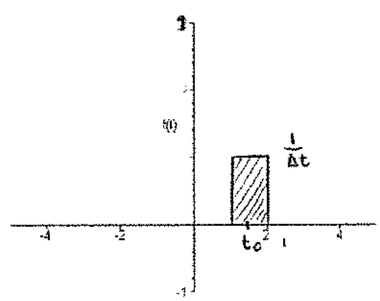


Supongamos que el cambio de 0 a 1 se da en un intervalo de tiempo Δt suavemente.

Derivando la función de la gráfica anterior

$Area = \frac{1}{\Delta t}\Delta t$

Si $\Delta t \to 0 \quad \frac{1}{\Delta t} \to \infty$



Al tomar el límite $\Delta t \to 0$ se obtiene un "impulso unitario". Este impulso unitario se define como función

$$f(t) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{f(t) = \delta(t - t_0)} \qquad \text{(Delta de Dirac)}$$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1$

$\delta(t - t_0) = \frac{du(t-t_0)}{dt}$

Se puede multiplicar $\delta(t - t_0)$ por una constante c por una función en general y obtener

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t)\, dt = f(t_0)} \qquad \text{(Funcin delta)}$$

2.7.1. Propiedades de la función Delta

1. Si $a < b$

$$\int_a^b \delta(t - t_0)\, dt = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & a < t_0 < b \\ 0 & b < t_0 < a \end{array} \right\}$$

2.

$$\begin{aligned} f(t)\,\delta(t) &= f(0)\,\delta(t) \\ t\delta(t) &= 0 \\ \delta(\alpha t) &= \frac{1}{|\alpha|}\delta(t) \\ \delta(-t) &= \delta(t) \end{aligned}$$

3.

$$f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$$

4.

$$|f(t)\,\delta(t')|' = f(t)\,\delta'(t) + f'(t)\,\delta(t)$$

2.8. Transformada de Fourier de la función impulso

$$\Im\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Se cumple $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t}|_{t=0} = 1$ Esta función cumple la identidad

$$\boxed{\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega} \text{ y } \boxed{\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \cos\omega t dt}$$

Y apartir de estas dos se obtiene

$$\boxed{\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx}$$

$$\boxed{\delta(t) = \acute{\Im}\{1\} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1)\, e^{i\omega t} dt}$$

Si calculamos la transformada de Fourier de una constante mediante la definición llegaremos a una integral que diverge, lo mismo sucede con las funciones $e^{i\omega_0 t}$, $\operatorname{sen}\omega_0 t$ y $\cos\omega_0 t$.

Utilicemos la función delta para calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

1. $\Im\{C\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Ce^{-i\omega t} dt = (2\pi C) \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi C\delta(-\omega)$.

   Como la función delta es par, entonces

   $$\boxed{\Im\{C\}=2\pi C\delta(\omega)}$$

2. $\Im\{e^{i\omega_0 t}\} = \Im\{1 \cdot e^{i\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$, donde $F = \Im\{1\}$; utilizando el resultado anterior $\Im\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

3. $\Im\{\operatorname{sen}\omega_0 t\} = \Im\left\{\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i}\Im\{e^{i\omega_0 t}\} - \frac{1}{2i}\Im\{e^{-i\omega_0 t}\}$; ya se conoce la transformada de una función exponencial, se tiene que: $\Im\{\operatorname{sen}\omega_0 t\} = i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$; análogamente se calcula la transformada del coseno

4. $\Im\{\cos\omega_0 t\} = i\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

2.9. Solución de Ecuaciones Diferenciales

Ejemplos:

1. $y' - 2y = H(t)\, e^{-2t} \qquad -\infty < t < \infty;$

   $\Im\{y' - 2y\} = \Im\{H(t)\, e^{-2t}\};$

   $\Im\{y'\} - \Im\{2y\} = \Im\{H(t)\, e^{-2t}\};$

   Si $\Im\{y\} = Y(\omega)$ entonces

   $i\omega Y(\omega) - 2Y(\omega) = \frac{1}{2+i\omega};$

   $Y(\omega)[i\omega - 2] = \frac{1}{2+i\omega}; Y(\omega) = \frac{1}{(i\omega-2)(2+i\omega)} = -\frac{1}{(2+i\omega)(2-i\omega)} = -\frac{1}{4+\omega^2};$

   $Y(\omega) = -\frac{2(2)}{4(4+\omega^2)} = -\frac{1}{4}e^{-2|t|}$

2. $y'' + 6y' + 8y = \delta(t-2)$

   $\Im\{y'' + 6y' + 8y\} = \Im\{\delta(t-2)\};$

   $-\omega^2 Y(\omega) + 6i\omega Y(\omega) + 8Y(\omega) = e^{-2i\omega};$

   $Y(\omega)[-\omega^2 + 6i\omega + 8] = e^{-2i\omega};$

   $Y(\omega) = \frac{e^{-2i\omega}}{-\omega^2+6i\omega+8} = \frac{e^{-2i\omega}}{(2+i\omega)(4+i\omega)};$

   $y(t) = \Im^{-1}\left\{\frac{1}{(2+i\omega)(4+i\omega)}\right\}|_{t\to t-2}$

   Ahora calculemos $\Im^{-1}\left\{\frac{1}{(2+i\omega)(4+i\omega)}\right\}$

   $\Im^{-1}\left\{\frac{1}{(2+i\omega)(4+i\omega)}\right\} = H(t)\, e^{-2t} * H(t)\, e^{-4t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\lambda)\, e^{-2\lambda} H(t-\lambda)\, e^{-4(t-\lambda)} d\lambda$

   $\Im^{-1}\left\{\frac{1}{(2+i\omega)(4+i\omega)}\right\} = H(t)\, e^{-4t} \int\limits_{0}^{t} e^{2\lambda} d\lambda = \frac{1}{2}H(t)\left[e^{-2t} - e^{-4t}\right]$

   Y por tanto la solución de la ecuación diferencial es

   $y(t) = \frac{1}{2}H(t-2)\left[e^{-2(t-2)} - e^{-4(t-2)}\right]$

3. Calcular la carga en un capacitor para un circuito RC, donde $R = 10\Omega$, $C = 0.02f$ y $V(t) = E\delta(t)$ con $E = 120V$.

   La ecuación del circuito es

   $q\prime + \frac{1}{RC}q = \frac{V(t)}{R};$

   $q\prime + \frac{1}{RC}q = \frac{E\delta(t)}{R};$

sustituyendo los valores contantes

$q\prime + 5q = 12\delta(t)$;

resolvamos esta ecuación aplicando la transformada de Fourier

$\Im\{q\prime + 5q\} = \Im\{12\delta(t)\} = 12\Im\{\delta(t)\}$;

Si $\Im\{q\} = Q(\omega)$;

$i\omega Q(\omega) + 5Q(\omega) = 12$;

factorizando $Q(\omega)(i\omega + 5) = 12$;

$Q(\omega) = \frac{12}{(i\omega+5)}$;

$q(t) = \Im^{-1}\{Q\} = \Im^{-1}\left\{\frac{12}{(i\omega+5)}\right\}$

esta transformada inversa es inmediata

$q(t) = 12H(t)e^{-5t}$, que es el valor de la carga para cualquier tiempo.

El voltaje en el capacitor es $V_c = \frac{1}{C}q(t) = \frac{12}{0.02}H(t)e^{-5t} = 600H(t)e^{-5t}$

La respuesta de salida será: $\frac{Q(\omega)}{C}$, calculando la norma de esta función: $\left|\frac{Q(\omega)}{C}\right| = \frac{600}{\sqrt{\omega^2+25}}$

La gráfica de $\left|\frac{Q(\omega)}{C}\right|$ contra ω es el espectro de la respuesta de salida.

Bibliografía.

Advanced Engineering Mathematics.
C.Ray Wyle.
Mc. Graw –Hill.

Matemáticas Avanzadas para Ingenieria.
Volumen II.
Peter V. O' Neil.
C.E.C.S.A.

Análisis de Fourier.
Hwei. P. Hsu.
Pearson.