Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Cómputo

Lista de problemas de Cálculo Aplicado

Carlos Juárez León

Héctor Rojas Luna

Departamento de Formación Básica

Septiembre 2013

Contenido

INTRODUCCIÓN

El cálculo diferencial e integral constituye un pilar en las matemáticas, esta profusa disciplina tiene en lo infinitesimal un cociente de restas mínimas cuyo numerador salva a veces una divergencia. La fluctuación entre la unidad y lo infinito es la indeterminación de que habla Isaac Newton y la captura de lo que escapa a la sumatoria no es mas que la colección de las aglomeradas mónadas de Gottfried W. Leibniz**.** Estas operaciones matemáticas de diferencias infinitesimales y suma de progresiones, como bases de rectángulos, son capaces de crear el continuo de lo discreto.

La solución en lo puramente matemático se resuelve en pendientes de rectas y áreas bajo curvas, encapsuladas en una *ecuación diferencial*. La extensión a las derivadas áreas de la ciencia en que el cálculo diferencial e integral aterriza, evidencia la tremenda herramienta que yace en Newton y Leibnitz. La Mecánica de Newton fue génesis de este instrumento calculador que se alarga hasta disciplinas como la economía y el estudio de problemas de índole social. La ingeniería, desarrollo de la técnica, debe su avance a esta poderosa herramienta, que le permite, por ejemplo, calcular el volumen de un contenedor industrial o más aun, poner en órbita un satélite artificial.

Es propósito de este trabajo mostrar la aplicabilidad del cálculo diferencial e integral en diversos problemas de la ingeniería como parte de la materia de Cálculo aplicado de la carrera de ingeniería en Sistemas computacionales de la Escuela Superior de Cómputo del IPN. Mostramos a manera de sumario de problemas una cuidadosa selección de diferentes ejercicios en los que exploramos las más variantes aplicaciones del Cálculo, para que los alumnos (o maestros) mas allá de ver la solución inmediata del problema, desarrollen la capacidad de planteamiento, esto por supuesto, sin querer que la memoria juegue el papel de la razón, es decir, nuestro objetivo es simplemente dar ejemplos concretos para que el estudiante forje la habilidad de solventar su propia resolución, que es parte medular en su formación profesional.

Explícitamente seccionamos el trabajo expuesto de la siguiente manera: en la sección primera del desarrollo de este trabajo presentamos ejercicios de razones de cambio, en la segunda sección exhibimos la aplicabilidad del cálculo integral mediante el cómputo de áreas y volúmenes de superficies y cuerpos irregulares; para la tercera sección, estudiamos las formas indeterminadas para poder evaluar integrales impropias. Finalmente damos todas las definiciones y criterios de convergencias de sucesiones para formalizar el cómputo de integrales.

UNIDAD TEMÁTICA 1

1.1 Tasas de cambio relacionadas

En los siguientes ejercicios sumiremos que las variables x y y son funciones derivables de t

$$x = x(t)\ ;\ y = y(t)$$

1. Si $2x + 3y = 8$ y $\frac{dy}{dt} = 2$, encuentra $\frac{dx}{dt}$

SOLUCIÓN. Derivamos ambos lados de la ecuación $2x + 3y = 8$ con respecto a t

$$2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 0$$

O bien

$$2\frac{dx}{dt} = -3\frac{dy}{dt}$$

Como $\frac{dy}{dt} = 2$, entonces $2\frac{dx}{dt} = -3(2)$. Por lo tanto $\frac{dx}{dt} = -3$

2. Si $xy = 20$ y $\frac{dy}{dt} = 10$, encuentra $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 2$

SOLUCIÓN. Derivamos ambos lados de la ecuación $xy = 20$ con respecto a t utilizando la regla del producto

$$x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$$

O bien

$$y\frac{dx}{dt} = -x\frac{dy}{dt}$$

Como $\frac{dy}{dt} = 10$, entonces cuando $x = 2$ se tiene que

$$y\frac{dx}{dt} = -2(10) *** (1)$$

Pero cuando $x = 2$ de la ecuación $xy = 20$ se obtiene que $y = 10$, por lo tanto de la ecuación (1) obtenemos que $\frac{dx}{dt} = -2$

3. Si $sen^2x + cos^2y = \frac{4}{5}$ y $\frac{dx}{dt} = -1$, encuentra $\frac{dy}{dt}$ en el punto $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$.

SOLUCIÓN. Derivamos ambos lados de la ecuación $sen^2x + cos^2y = \frac{4}{5}$ con respecto a t utilizando la regla de la cadena

$$(2senx.cosx)\frac{dx}{dt} - (2cosy.seny)\frac{dy}{dt} = 0$$

O bien

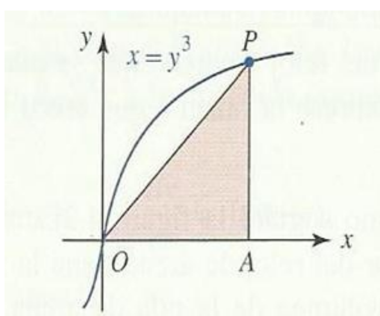
$$(2senx.cosx)\frac{dx}{dt} = (2cosy.seny)\frac{dy}{dt}$$

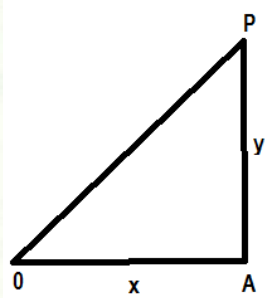
$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{senx.cosx}{cosy.seny}\right)\frac{dx}{dt}$$

Como $\frac{dx}{dt} = -1$, entonces en el punto $(x, y) = \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$.se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{sen\left(\frac{2}{3}\pi\right).cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{cos\left(\frac{3}{4}\pi\right).sen\left(\frac{3}{4}\pi\right)}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.- La coordenada x del punto $\boldsymbol{P}$ que se muestra en la figura tiene una tasa de crecimiento de $\frac{1}{3}cm/h$. ¿Cuán rápido crece el área del triángulo rectángulo $\boldsymbol{OPA}$ cuando las coordenadas de $\boldsymbol{P}$ son (8,2)?





SOLUCIÓN. Sean x y y las distancias de los segmentos $\overline{0A}$ y $\overline{AP}$ respectivamente y denotemos por $A(x, y)$ el área del triángulo $\boldsymbol{OAP}$ tal y como se indica en la figura. Entonces se tiene la siguiente información.

Datos $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}cm/h$

Incógnita Hallar el valor de $\frac{dA}{dt}$ cuando $\boldsymbol{P} = (x, y) = (8,2)$

De acuerdo con la figura descrita para este ejercicio, se deduce que el área del triángulo $\boldsymbol{OAP}$ es

$$A(x,y) = \frac{1}{2}xy *** (1)$$

Y además se sabe que la ecuación de la curva es

$$x = y^3 \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}} *** (2)$$

La ecuación (1) es la ecuación que relaciona las variables. Ahora derivamos ambos lados de la ecuación (1) con respecto a t para obtener

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right] *** (3)$$

El único dato que no conocemos en esta ecuación es el diferencial $\frac{dy}{dt}$ pero lo podemos conocer derivando a la ecuación (2), con lo cual obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{dx}{dt} *** (4)$$

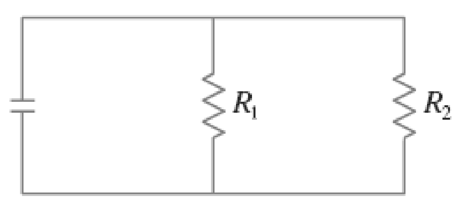
Sustituyendo (4) en (3) y sustituyendo valores $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}, x = 8;\ y = 2$ se obtiene lo siguiente

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(8)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) + (2)\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{9}$$

Por lo tanto

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4}{9}cm^2/h$$

5.- Cuando dos resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo, la resistencia total del sistema está dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Si R_1 & R_2 aumentan a razón de 0.01 ohms/seg y 0.02 ohms/seg respectivamente, a razón de cuántos ohms por segundo cambia R en el momento en que $R_1 = 30\ ohms$ y $R_2 = 90\ ohms$?



SOLUCIÓN.

Datos $\frac{dR_1}{dt} = 0.01\text{ohms/seg} \ \ y \ \frac{dR_2}{dt} = 0.02\text{ohms/seg}$

Incógnita Hallar el valor de $\frac{dR}{dt}$ cuando $R_1 = 30 \ ohms$ y $R_2 = 90 \ ohms$

De acuerdo con el esquema de este ejercicio se tiene que la ecuación que relaciona las variables está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 \, R_2}{R_1 + R_2} *** \, (1)$$

Derivamos ambos lados de la ecuación (1) con respecto a t utilizando la regla del cociente de funciones

$$\frac{dR}{dt} = \frac{(R_1 + R_2)\left\{R_1 \frac{dR_2}{dt} + R_2 \frac{dR_1}{dt}\right\} - R_1 \, R_2 \left\{\frac{dR_1}{dt} + \frac{dR_2}{dt}\right\}}{(R_1 + R_2)^2} *** \, (2)$$

Ya que $\frac{dR_1}{dt} = 0.01\text{ohms/seg} \ \ y \ \frac{dR_2}{dt} = 0.02\text{ohms/seg}$, entonces cuando $R_1 = 30 \ ohms$ y $R_2 = 90 \ ohms$ al sustituir todos estos datos en (2) se obtiene que el valor de $\frac{dR}{dt}$ es

$$\frac{dR}{dt} = \frac{(120)\{30(0.02) + 90(0.01)\} - (2700)\{0.01 + 0.02\}}{14400} = 6.875 \times 10^{-3}$$

Por lo tanto $\frac{dR}{dt} = 6.875 \times 10^{-3}\text{ohms/seg}$

6.- Demuestra que la tasa de cambio del volumen de una esfera con respecto al radio es igual al área de la superficie.

Demostración. Se sabe que el volumen de una esfera de radio r está dado por la fórmula

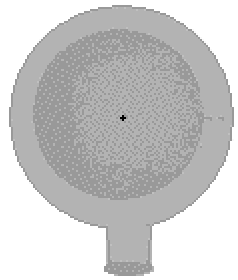
$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Por lo tanto, al derivar a ambos lados de esta ecuación con respecto a r obtenemos lo siguiente

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

Esta expresión es precisamente la fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera.

7.- Un globo esférico está siendo inflado de tal manera que su volumen aumenta a razón de $5\frac{m^3}{min}$. ¿Con qué rapidez aumenta su diámetro cuando este tiene 12 mts?



SOLUCIÓN. Denotemos por D al diámetro del globo.

Datos $\frac{dV}{dt} = 5\frac{m^3}{min}$

Incógnita Hallar el valor de $\frac{dD}{dt}$ cuando $D = 12m$

De acuerdo con el esquema de este ejercicio se tiene que para encontrar la ecuación que relaciona las variables $V\ y\ D$, vamos a utilizar la fórmula para calcular el volumen de una esfera

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Como $D = 2r$ entonces el volumen de una esfera en función del diámetro se escribe de la siguiente manera

$$V(r) = \frac{1}{6}\pi D^3 *** (1)$$

La ecuación (1) es la ecuación que relaciona las variables volumen-diámetro. Ahora derivamos ambos lados de la ecuación (1) con respecto a t para obtener

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi D^2 \frac{dD}{dt}$$

O bien

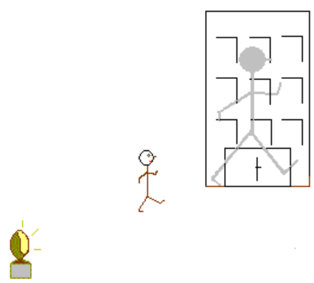
$$\frac{dD}{dt} = \frac{3}{\pi D^2}\frac{dV}{dt}$$

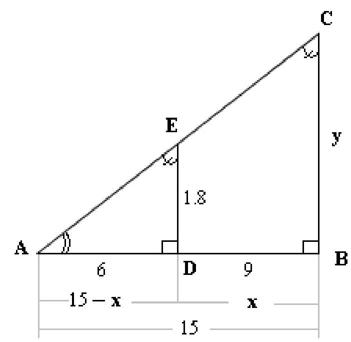
Ya que $\frac{dV}{dt} = 5\frac{m^3}{min}$ entonces cuando $D = 12m$ al sustituir en (2), el valor de $\frac{dD}{dt}$ es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{5}{72\pi}\frac{m}{min}$$

8.- Un hombre de 1.80 metros de estatura camina hacia un edificio a razón de 1.5 m/s. Si hay una lámpara sobre el suelo a 15 metros del edificio, ¿con qué rapidez se acorta la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 metros del mismo?

Solución. En el siguiente diagrama se han expresado los datos del ejercicio





En este caso y *representa la altura de la sombra del hombre sobre el edificio* y x denota la distancia horizontal a la que se encuentra el hombre del edificio en un determinado momento.

Datos. $\frac{dx}{dt} = 1.5 m/s$

Incógnita. Hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 9$

Con la ayuda del diagrama anterior vamos a determinar cuál es la ecuación que relaciona las variables x y y. Para ello vamos a utilizar semejanza de triángulos, como podemos observar se tiene la siguiente relación entre segmentos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$$

Esto es

$$\frac{15}{15 - x} = \frac{y}{1.8}$$

Y de aquí se tiene que

$$15y - xy = 27 *** (1)$$

La ecuación (1) es la ecuación que relaciona las variables x & y. Ahora derivamos ambos lados de la ecuación (1) con respecto a t para obtener

$$15\frac{dy}{dt} - x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0$$

$$15\frac{dy}{dt}-x\frac{dy}{dt}=y\frac{dx}{dt}$$

O bien, al despejar al diferencial $\frac{dy}{dt}$ de esta expresión se obtiene lo siguiente

$$\frac{dy}{dt}=\left(\frac{y\frac{dx}{dt}}{15-x}\right)***\ (2)$$

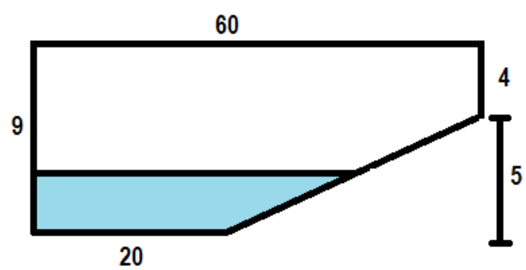
Ya que $\frac{dx}{dt}=1.5$ solamente nos falta determinar el valor de y. De acuerdo con los datos del ejercicio, al sustituir $x=9$ en la ecuación (1) se obtiene que

$$y=\frac{27}{6}$$

Finalmente al sustituir estos datos en la ecuación (2) se obtiene que el valor de $\frac{dy}{dt}$ es

$$\frac{dV}{dt}=\left(\frac{\frac{27}{6}(1.5)}{15-9}\right)=\frac{9}{8}m/s$$

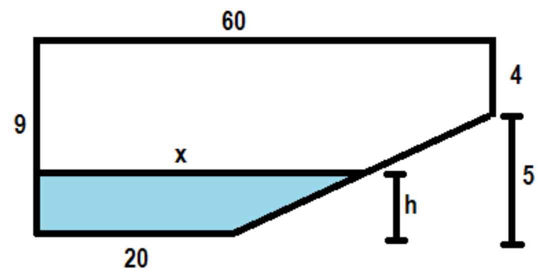
9. La orilla de una alberca es un rectángulo de 60 metros de largo y 30 de ancho, y su sección transversal tiene las dimensiones (en metros) que se indican en la figura. La alberca se está llenando a razón de 500 metros cúbicos de agua por minuto. Calcula aproximadamente la razón de cambio del nivel del agua $\boldsymbol{h}$ en el momento en que la profundidad en la parte más honda es de 4 metros



Solución. Sea x la longitud horizontal y h la altura del nivel del agua de la alberca que se indican en el diagrama anterior. Entonces tenemos lo siguiente

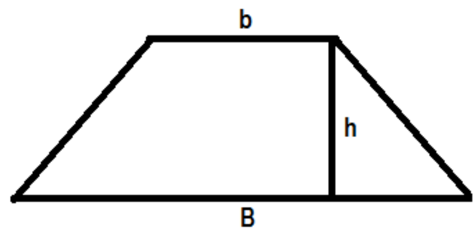
Datos. $\frac{dV}{dt}=500m^3/min$

Incógnita. Hallar $\frac{dh}{dt}$ cuando $h=4$.



Con la ayuda del diagrama anterior vamos a determinar cuál es la ecuación que relaciona las variables V & h. Para ello vamos a utilizar la fórmula para calcular el área de un trapecio dada por

$$A = \frac{1}{2}(B + b)h *** (1)$$



Y también un poco de semejanza, como podemos observar del diagrama anterior se tiene la siguiente relación entre segmentos

$$\frac{60}{x} = \frac{5}{h}$$

Esto es

$$x = 12h *** (2)$$

En nuestro caso solamente necesitamos calcular el valor de $A_1 = \frac{1}{2}A$ dado en (1) el cual representa al área de la zona sombreada en el diagrama, por lo cual encontramos que el valor de esta área es

$$A_1 = \frac{1}{4}(2x + 40)h *** (3)$$

Pero por (2) se llega a

$$A_1 = \frac{1}{4}(24h + 40)h *** (4)$$

Por lo tanto, el volumen de agua en la parte sombreada puede expresarse en términos de la altura del nivel del agua h como

$$V(h) = (6h + 10)30h; 0 \leq h \leq 5 *** (5)$$

Donde

$$V(0) = 0 \; y \; V(5) = 6000$$

La ecuación (5) es tan solo una parte de la ecuación que relaciona las variables $V \; y \; h$. De hecho, el volumen es una función definida por partes con dominio definido por $[0,9]$ por lo que aún queda pendiente la parte del llenado que va de $5 \leq h \leq 9$. Pero como en nuestro caso solamente estamos interesados en conocer la razón de cambio del nivel del agua $\boldsymbol{h}$ en el momento en que la profundidad en la parte más honda es de 4 metros entonces concluimos que con este análisis es suficiente para resolver este ejercicio.

Ahora derivamos ambos lados de la ecuación (5) con respecto a t para obtener

$$\frac{dV}{dt} = 360h\frac{dh}{dt} + 300; 0 \leq h \leq 5$$

Por lo tanto

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt} - 300}{360h} *** \; (6)$$

Pero como $\frac{dV}{dt} = 500m^3/min$, entonces cuando $h = 4$ de (6) se concluye que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{500 \; - 300}{360(4)} = \frac{5}{36}$$

Por lo tanto la razón de cambio del nivel del agua $\boldsymbol{h}$ en el momento en que la profundidad en la parte más honda es de 4 metros es de aproximadamente $\frac{5}{36}\frac{m}{min}$

1.2 APROXIMACIONES LINEALES Y DIFERENCIALES

1.- Calcula la diferencial dy de las siguientes funciones y luego evalúala para los valores dados de x y dx

(a) $y = \sqrt{4+5x}\,; x = 0\ y\ dx = 0.04$

(b) $y = \frac{1}{x+1}; x = 1\ y\ dx = -0.01$

Solución. (a) $dy = \frac{5}{2\sqrt{4+5x}}dx$ por lo tanto, cuando $x = 0\ y\ dx = 0.04$ se tiene que

$$dy = \frac{5}{2\sqrt{4}}(0.04) = 0.05$$

(b) $dy = -\frac{1}{(x+1)^2}dx$ por lo tanto, cuando $x = 1\ y\ dx = -0.01$ se tiene que

$$dy = -\frac{1}{4}(-0.01) = 0.0025$$

2.-Sean $f(x) = (x-1)^2$; $g(x) = e^{-2x}$ & $h(x) = 1 + \ln(1-2x)$. Encuentra la linealización de $f,\ g\ y\ h$ en $a = 0$ ¿Qué se puedes observar? Explica.

Solución. Para resolver este ejercicio vamos a utilizar la expresión

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) *** (1)$$

Se sabe que $L(x)$ o mejor dicho, la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ es una buena aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. En este caso se cumple lo siguiente

$f(x) = (x-1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x-1)$

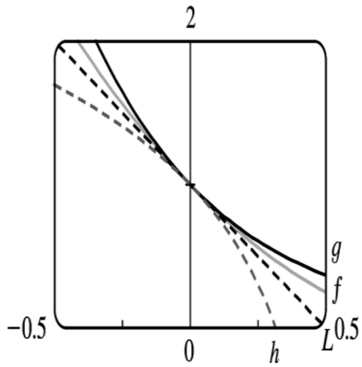
$g(x) = e^{-2x} \Rightarrow g'(x) = -2e^{-2x}$

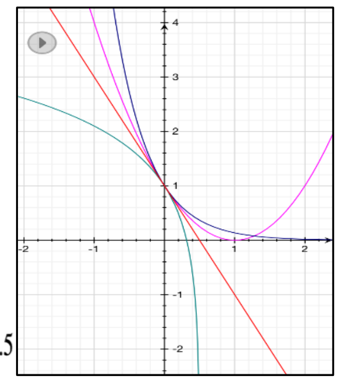
$h(x) = 1 + \ln(1-2x) \Rightarrow h'(x) = \frac{-2}{1-2x}$

De esta manera, utilizando la expresión (1) con $a = 0$ obtenemos que la linealización para cada una de estas funciones es

$$L_f(x) = f(0) + xf'(0) = 1 - 2x$$
$$L_g(x) = g(0) + xg'(0) = 1 - 2x$$
$$L_h(x) = h(0) + xh'(0) = 1 - 2x$$

Esto es porque las funciones $f, g\ y\ h$ y sus derivadas tienen los mismos valores en $a = 0$. La aproximación lineal parece ser mucho mejor para f que para las funciones h y g, esto se debe a que para un mismo dominio que contenga al punto $a = 0$ y donde la gráfica de $f, g\ y\ h$ comienzan a aproximarse a L la aproximación es mucho mejor para la gráfica de f que las de g y h. Por otra parte, la aproximación empeora más para h ya que su grafica se aleja mucho más rápido de L que las gráficas de f y g.

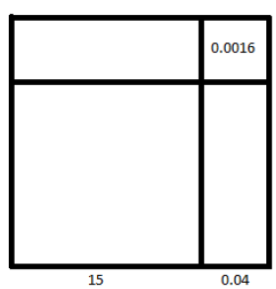




3.- Al calentar una placa cuadrada metálica de 15m de longitud, su lado aumenta aproximadamente 0.04m. Utiliza diferenciales para estimar cuanto aumentó aproximadamente su área.

<u>Solución.</u> Por la simplicidad de éste ejercicio en particular, sólo en este caso vamos a calcular la variación □ A y la compararemos con dA.

Nótese que originalmente teníamos una placa de 15×15, después de calentarla obtenemos una placa de 15.04×15.04, como la que se muestra en la figura.



En este caso la función es $A(L) = L^2$ y por lo tanto el valor exacto del incremento está dado por la variación ΔA en $L = 15$ y $\Delta L = 0.04$, esto es

$$\Delta A = A(L + \Delta L) - A(L)$$

$$= A(15.04) - A(15)$$

$$= 226.2016 - 225 = 1.2016$$

Por lo tanto, el valor exacto del incremento del área superficial de la placa es de $1.2016cm^2$. Si ahora calculamos el diferencial de área para $A(L) = L^2$ con $L = 15m\ y\ dL = 0.04m$, obtenemos:

$$dA = (2L)dL = 2(15m)(0.04m) = 1.2m^2$$

En consecuencia, cuando el lado se incrementa en 0.4m, el área aumenta aproximadamente $1.2m^2$. Por lo tanto el error en nuestra aproximación es solamente de $\Delta A - dA = 0.0016m^2$.

4.- Se encontró que la arista de un cubo es de 30 cm, con un error posible en la medición de 0.1 cm. Utiliza diferenciales para estimar el error máximo posible y el error relativo al calcular el volumen del cubo. Encuentra el área superficial del cubo.

Solución. (a) Sea L la longitud de uno de los lados del cubo. Sabemos que entonces su volumen está dado por la fórmula

$$V(L) = L^3 *** (1)$$

Al diferenciar a ambos lados de esta ecuación encontramos que

$$\frac{dV}{dL} = 3L^2 \Rightarrow dV = 3L^2 dL *** (2)$$

Cuando $x = 30\ y\ dL = 0.1$ de la ecuación (2) obtenemos que

$$dV = 3(30)^2(0.1) = 270$$

De esta manera el error máximo posible que se comete al calcular el volumen del cubo es de alrededor de $270cm^3$

El error relativo se puede aproximar mediante diferenciales de la siguiente manera

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V}$$

O sea que para $L = 30\ y\ dL = 0.1$ tenemos

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{3L^2 dL}{L^3} = \frac{3(0.1)}{30} = 0.01$$

Y por lo tanto el error porcentual que se comete es

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right) \times 100\% \approx \left(\frac{dV}{V}\right) \times 100\% = (0.01) \times 100\% = 1\%$$

(b) El área superficial de un cubo $A_S(L)$ se calcula con la fórmula

$$A_S(L) = 6L^2 *** (1)$$

En este caso

$$dA_S = 12LdL *** (2)$$

Cuando $x = 30\ y\ dL = 0.1$ de la ecuación (2) obtenemos que $dA_S = (12)(30)(0.1) = 36$

De esta manera el error máximo posible que se comete al calcular el área superficial del cubo es de alrededor de $36cm^3$

El error relativo para $L = 30\ y\ dL = 0.1$ es aproximadamente de

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{12LdL}{6L^2} = \frac{2(0.1)}{30} = 0.00\overline{6}$$

Y por lo tanto el error porcentual que se comete es

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right) \times 100\% \approx \left(\frac{dV}{V}\right) \times 100\% = (0.00\overline{6}) \times 100\% = 0.\overline{6}\%$$

5.- Utiliza diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor, a un domo hemisférico de 50cm de diámetro

<u>Solución.</u> Se sabe que la tasa de cambio del volumen de una esfera con respecto al radio es igual al área de la superficie. En otras palabras, si el volumen de una esfera está dado por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Entonces el diferencial

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

Es igual al área de su superficie. Por lo tanto, el volumen y el área superficial para un domo hemisférico estarán dados respectivamente por las siguientes expresiones

$$V(r) = \frac{2}{3}\pi r^3\ y\ \frac{dV}{dr} = 2\pi r^2$$

Y de esta manera, el volumen aproximado de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor, a un domo hemisférico de 50cm de diámetro se puede obtener con la fórmula

$$dV = 2\pi r^2 dr; donde\ r = \frac{D}{2} = 0.25m\ y\ dr = 0.0005m$$

Por lo tanto

$$dV = 2\pi(0.25m)^2(0.0005\text{m}) \approx 1.9635 \times 10^{-4}\ m^3$$

1.3 APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1.- Obtén la gráfica de la siguiente ecuación

$$y = x - x^2; x \in (-\infty, \infty)$$

SOLUCION. Vamos a utilizar un poco de teoría de máximos y mínimos de funciones para resolver este ejercicio. Como

$$f(x) = x - x^2 = x(1 - x)$$

Entonces las raíces de esta ecuación son $x = 0$ & $x = 1$.

Por otra parte se tiene que $f'(x) = 1 - 2x$, debido a que la derivada de esta función existe para toda $x \in (-\infty, \infty)$ entonces para encontrar sus números críticos solamente hay que resolver la ecuación

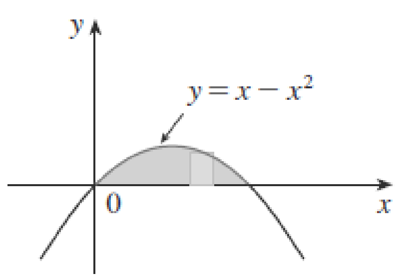
$$f'(x) = 0$$

O sea

$$1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in (-\infty, \infty)$$

Por lo tanto $x = \frac{1}{2}$ es número critico de $f(x) = x - x^2$. Y como $f''(x) = -2$, entonces $f''(x) < 0$ para toda $x \in (-\infty, \infty)$. En particular se tiene que $f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, de esta manera, por el criterio dela segunda derivada se tiene que $f(x) = x - x^2$ tiene un máximo local en $x = \frac{1}{2}$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Así que la coordenada de este punto es

$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, a partir de toda esta información se puede obtener un bosquejo de la apariencia de la gráfica de $y = x - x^2$como se indica a continuación.



2.-Para las siguientes funciones

(a) Encuentra los intervalos donde la función f es creciente o decreciente
(b) Encuentra los valores máximos y mínimos locales de f
(c) Encuentra los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión

I.- $f(x) = x - 2senx; 0 < x < 3\pi$

II.- $f(x) = xln(x)$

III.- $f(x) = x^2 e^x$

Vamos a utilizar el criterio de la primera derivada para saber quiénes son los valores mínimos locales de f, la prueba de concavidad y la definición de puntos de inflexión.

<u>I.- SOLUCION</u>.

(a) Como $f(x) = x - 2senx; 0 < x < 3\pi$ Entonces $f'(x) = 1 - 2cosx$

$$f'(x) > 0 \iff 1 - 2cosx > 0$$

$$\iff cosx < \frac{1}{2} *** (1)$$

$$\iff \frac{1}{3}\pi < x < \frac{5}{3}\pi \text{ O bien } \frac{7}{3}\pi < x < 3\pi$$

La condición (1) puede apreciarse mejor en la gráfica de la función $y = cosx$. Por lo tanto, $f(x)$ es creciente en los intervalos $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$ y $\left(\frac{7}{3}\pi, 3\pi\right)$. Similarmente se tiene que

$$f'(x) < 0 \iff 1 - 2cosx < 0$$

$$\iff \frac{1}{2} < cosx$$

$$\iff 0 < x < \frac{1}{3}\pi \text{ O bien } \frac{5}{3}\pi < x < \frac{7}{3}\pi$$

Por lo tanto, $f(x)$ es decreciente en los intervalos $\left(0, \frac{1}{3}\pi\right)$ y $\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi\right)$.

(b) Como para f' se cumple que

$f' < 0\ en \left(0, \frac{1}{3}\pi\right), f' > 0\ en \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right), f' < 0\ en \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi\right), y\ f' > 0\ en \left(\frac{7}{3}\pi, 3\pi\right)$.

Entonces se tiene lo siguiente.

La función f pasa de decreciente a creciente en el punto $x = \frac{1}{3}\pi$.

La función f pasa de creciente a decreciente en el punto $x = \frac{5}{3}\pi$

La función f pasa de decreciente a creciente en el punto $x = \frac{7}{3}\pi$

Por lo tanto, por el criterio de la primera derivada se concluye que

$f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -0.68$ es un mínimo local de f,

$f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 6.97$ es un máximo local de f y que

$f\left(\frac{7}{3}\pi\right) = 5.60$ también es un mínimo local de f.

(c) La segunda derivada de f es $f''(x) = 2senx$ entonces

$$f''(x) > 0 \iff 2senx > 0$$

$$\iff senx > 0$$

$$\iff 0 < x < \pi \text{ O bien } 2\pi < x < 3\pi$$

Por la prueba de concavidad, la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en los intervalos $(0, \pi)$ y $(2\pi, 3\pi)$. Similarmente se tiene

$$f''(x) < 0 \iff 2senx < 0$$

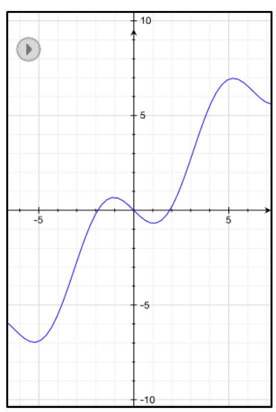
$$\iff cosx < 0$$

$$\iff \pi < x < 2\pi$$

Por la prueba de concavidad, la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(\pi, 2\pi)$. Ya que para f'' se cumple que

$$f'' > 0\ en(0, \pi), f'' < 0\ en(\pi, 2\pi), f'' > 0\ en(2\pi, 3\pi).$$

Entonces concluimos que la función f tiene un punto de inflexión en los puntos $(\pi, \pi)\ y\ (2\pi, 2\pi)$.



Gráfica de $y = x - 2senx$

2.- SOLUCIÓN.

(a) Como $f(x) = xln(x); x \in (0, \infty)$ entonces $f'(x) = 1 + lnx$. Para resolver este ejercicio ahora vamos a emplear los números críticos de la función. Como f'está definida en todo el dominio de f entonces para encontrar los números críticos de f resolveremos la ecuación

$$f'(x) = 0$$

Esto es

$$1 + lnx = 0$$

$$x = \frac{1}{e}$$

Como $x = \frac{1}{e}$ se encuentra en el dominio de f entonces se tiene que $x = \frac{1}{e}$

Es número crítico de la función f. Ahora vamos a considerar los siguientes subintervalos de $\mathbb{R}$.

$$\left(0, \frac{1}{e}\right), \left(\frac{1}{e}, \infty\right)$$

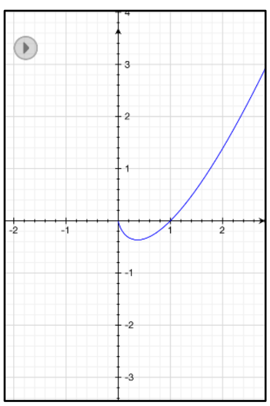
Como $f'(x) \neq 0$ para cada uno de estos intervalos, entonces para conocer el signo de $f'(x)$ solamente hay que tomar un número de prueba dentro de cada uno de estos intervalos y evaluarlo en $f'(x)$. Si por ejemplo, tomamos $x = 0.3 y$ $x = 0.4$ se encuentra que

$$f'(0.3) < 0 \; y \; f'(0.4) > 0$$

Por lo tanto $f'(x) < 0$ si $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ y de esta manera, f es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. Similarmente se tiene que $f'(x) > 0$ si $x \in \left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ por lo tanto se tiene que la función f es creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ y f es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

(b) del inciso anterior vemos que la función f pasa de decreciente a creciente en el punto $x = \frac{1}{e}$ por lo tanto $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ es un mínimo local de f.

(c) La segunda derivada de f es $f''(x) = \frac{1}{x}$ la cual es siempre positiva para $x > 0$, por lo tanto f es cóncava hacia arriba sobre todo su dominio y no tiene puntos de inflexión.



Grafica de $y = xlnx$

3.- SOLUCIÓN.

(a) Como $f(x) = x^2e^x \; x \in (-\infty, \infty)$ entonces $f'(x) = x(x+2)e^x$. Para resolver este ejercicio nuevamente vamos a emplear a los números críticos de la función. Como f'está definida en todo el dominio de f entonces para encontrar los números críticos de f resolveremos la ecuación

$$f'(x) = 0$$

Esto es

$$x(x+2)e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \;\; o \; x = 0$$

Como $x = 0 \; y \; x = -2$ se encuentran en el dominio de f entonces se tiene que $x = 0 \; y \; x = -2$ son números críticos de la función f. Ahora vamos a considerar los siguientes subintervalos de $\mathbb{R}$.

$$(-\infty, -2), (-2{,}0), (0, \infty)$$

Como $f'(x) \neq 0$ para cada uno de estos intervalos, entonces para conocer el signo de $f'(x)$ solamente hay que tomar un número de prueba dentro de cada uno de estos intervalos y evaluarlo en $f'(x)$. Si por ejemplo, tomamos

$$x = -3, x = -1 \; y \; x = 1$$

Entonces se cumple lo siguiente

$$f'(-3) > 0, f'(-1) < 0 \; y \; f'(1) > 0$$

Por lo tanto $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -2)$ y de esta manera, f es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$. Similarmente se tiene que $f'(x) < 0$ si $x \in (-2{,}0)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (0, \infty)$, por lo tanto la función f es decreciente en el intervalo $(-2, 0)$ y es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

(b) del inciso anterior y por el criterio de la primera derivada vemos que la función f pasa de creciente a decreciente en el punto $x = -2$ por lo tanto $f(-2) = 4e^{-2}$ es un máximo local de f.

La función f pasa de decreciente a creciente en el punto $x = 0$ por lo tanto $f(0) = 0$ es un mínimo local de f.

(c) La segunda derivada de f es $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$. Para encontrar los puntos de inflexión de f primero necesitamos saber cuáles son los puntos $x = c$ en los que $f''(c) = 0$ o bien $f''(c)$ no existe y luego decir para cuales subintervalos del dominio de f, el signo de $f''(x)$ es positivo y donde es negativo.

Como f'' está definida en todo el dominio de f entonces para encontrar los números donde se anula la función f'' primero resolveremos la ecuación

$$f''(x) = 0$$

Esto es

$$e^x(x^2 + 4x + 2) = 0$$

Como $y = e^x > 0$ para toda x, entonces esta igualdad se cumplirá si y sólo si

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

Es claro que estos puntos se encuentran en el dominio de f. Ahora vamos a considerar los siguientes subintervalos de $\mathbb{R}$.

$$(-\infty, -2 - \sqrt{2})(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}), (-2 + \sqrt{2}, \infty)$$

Como $f''(x) \neq 0$ para cada uno de estos intervalos, entonces para conocer el signo de $f''(x)$ solamente hay que tomar un número de prueba dentro de cada uno de estos intervalos y evaluarlo en $f'(x)$. Si por ejemplo, tomamos

$$x = -3.5, x = -3.4 \;\; y \;\; x = 0$$

Se encuentra que

$$f''(-3.3) > 0, f''(-0.6) < 0 \; y \; f''(0) > 0$$

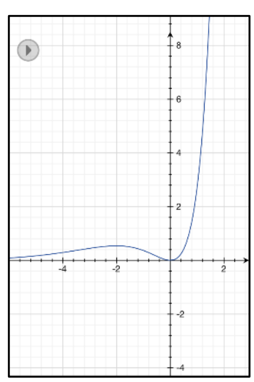
Y por lo tanto se tiene que

$f''(x) > 0 \; en \; (-\infty, -2 - \sqrt{2}), f''(x) < 0 \; en(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$

$y \; f''(x) > 0 \; en(-2 + \sqrt{2}, \infty)$

De esta manera, por la prueba de concavidad se tiene que f'' es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, -2 - \sqrt{2})$, es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$ y es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-2 + \sqrt{2}, \infty)$. Por lo tanto f tiene dos puntos de inflexión en los puntos

$$\left(-2 - \sqrt{2}, f(-2 - \sqrt{2})\right) \approx (-3.41, 0.38) \; y \; \left(-2 + \sqrt{2}, f(-2 + \sqrt{2})\right) \approx (-0.59, 0.19).$$



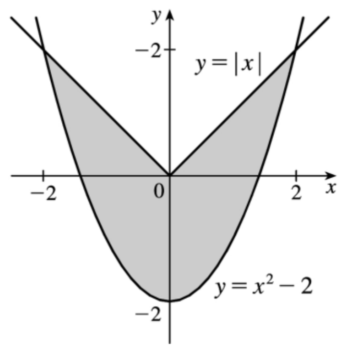
Gráfica de $y = x^2 e^x$

UNIDAD TEMÁTICA 2

2.1 AREA ENTRE CURVAS

Calcula el área de la región acotada por las siguientes gráficas

1.- $y = |x|; \quad y = x^2 - 2$



SOLUCION. Es evidente que la región es simétrica con respecto al eje Y, entonces podemos evaluar solo en el intervalo $x \in [0,2]$, y el resultado multiplicarlo por 2 y de esta manera obtendremos el área A de esta región.

En efecto, si $x \in [0,2]$, entonces $|x| = x$, entonces, sean

$$f(x) = y = |x| \quad \Rightarrow \quad f(x) = x,$$
$$g(x) = y = x^2 - 2$$

Entonces:

$$A = 2\int_0^2 [f(x) - g(x)]dx \; = 2\int_0^2 [x - (x^2 - 2)]dx = 2\int_0^2 (x - x^2 + 2)dx = \frac{20}{3}$$

Por lo tanto, el área de la región A es $\frac{20}{3}\mathrm{u}^2$

2.- $y = cosx; y = sen2x; x = 0, x = \frac{\pi}{2}$

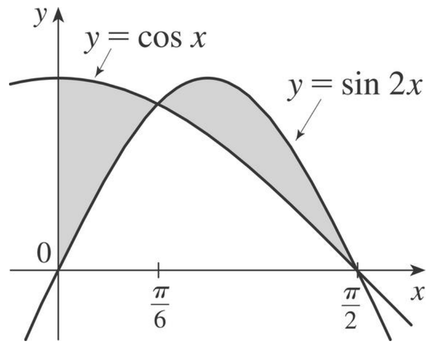
SOLUCION. Primero vamos a encontrar los puntos de intersección entre estas curvas. Estos están donde se cumple que

$$cosx = sen2x *** (1)$$

Pero

$$sen2x = 2senx \cos x$$

Por lo tanto, de (1) se tiene que $cosx = 2senx\ cosx \Leftrightarrow senx = \frac{1}{2}$



Como $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, entonces esto ocurre cuando $x = \frac{\pi}{6}$. De acuerdo con el diagrama anterior observamos que

$$cosx \geq sen2x\ para\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} *** (2)$$

Y que

$$sen2x \geq cosx\ para\ \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} *** (3)$$

Por lo tanto, el área para la región dada por la condición (2) está dada por

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (cosx - sen2x)dx = \frac{1}{4}$$

Por otra parte, el área para la región dada por la condición (3) está dada por

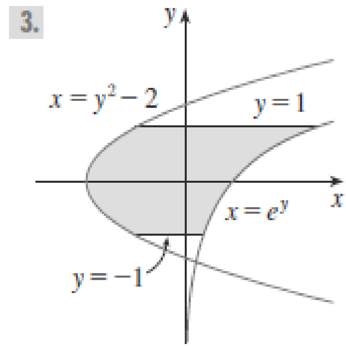
Por lo tanto, el área para la región dada por la condición (2) está dada por

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (sen2x - cosx)dx = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, el área total de la región pedida en unidades cuadradas es de

$$A = A_2 + A_2 = \frac{1}{2}u^2$$

3.- Calcula el área de la región sombreada



SOLUCION. De acuerdo a los datos que nos proporciona la figura, observamos que

$$e^y \geq y^2 - 2, para - 1 \leq y \leq 1$$

Por lo tanto, el área de la región sombreada en unidades cuadradas es

$$A = \int_{-1}^{1} \{e^y - (y^2 - 2)\}\, dy = \int_{-1}^{1} (e^y - y^2 + 2)\, dy = \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{e} + e\right) u^2$$

3.- ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ encierra una región? Encuentra el área de esa región.

SOLUCION. Primero vamos a calcular los puntos de intersección entre estas curvas. Para ello, vemos que

$$mx = \frac{x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{m} - 1};\ para\ 0 < m \leq 1$$

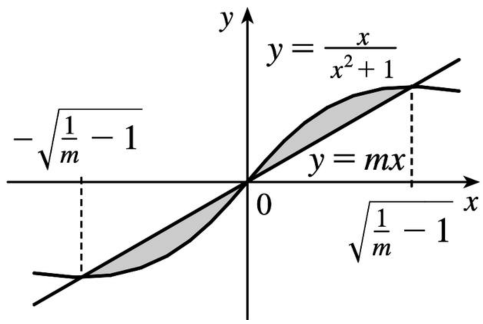
De esta manera, para encontrar las coordenadas $P = (x, y)$ de los puntos de intersección entre estas curvas, podemos por ejemplo sustituir los valores de

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{m} - 1};\ para\ 0 < m \leq 1$$

En la ecuación de $y = mx$ para concluir que estas están dadas por

$$P_0 = \left(-\sqrt{\frac{1}{m} - 1}, -m\sqrt{\frac{1}{m} - 1}\right), P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{m} - 1}, m\sqrt{\frac{1}{m} - 1}\right)\ y\ P_2 = (0,0)\ en\ m = 1$$

Por lo tanto, para $0 < m \leq 1$ la gráfica de la región que se forma con la intersección de estas curvas es la siguiente



De acuerdo con el diagrama anterior observamos que

$$mx \geq \frac{x}{x^2+1} \;\; para - \sqrt{\frac{1}{m} - 1} \leq x \leq 0 *** (1)$$

Y que

$$\frac{x}{x^2+1} \geq mx \;\; para\; 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{m} - 1} *** (2)$$

Como la región que se indica es simétrica con respecto al eje Y, entonces para encontrar el valor A de su área podemos considerar sólo en el intervalo $x \in \left[0, \sqrt{\frac{1}{m} - 1}\right]$, y el resultado multiplicarlo por 2, por lo tanto, por la condición (2), el área para toda la región sombreada está dada por

$$A = 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{m}-1}} \left(\frac{x}{x^2+1} - mx\right) dx = m - ln(m) - 1$$

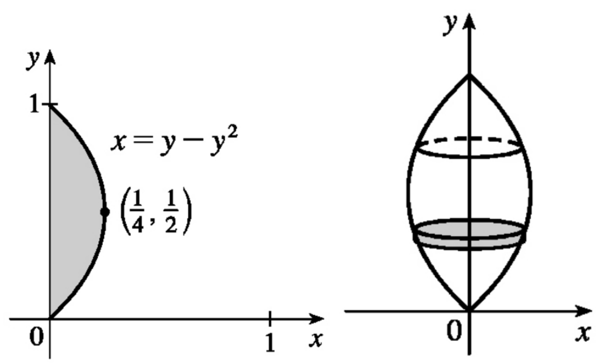
Por lo tanto, el área total de la región pedida es de $(m - ln(m) - 1)u^2$

2.2 CÁLCULO DE VOLUMENES

2.- Representa la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y luego plantea la integral o las integrales necesarias para calcular el volumen del sólido S que se obtiene al girar R alrededor de la recta indicada

$$a)\ x = y - y^2; x = 0;\ alrededor\ del\ eje\ y.$$

SOLUCION. En la siguiente figura se muestra a la región y al sólido S que se forma junto con un disco característico



El área de la sección transversal de este disco está dada por

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(y - y^2)^2 = \pi[g(y)]^2$$

Y su volumen es

$$V(y) = A(y)dy = \pi x^2 dy = \pi(y - y^2)^2 dy$$

De esta manera, utilizando la fórmula

$$V(S) = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi[g(y)]^2\, dy$$

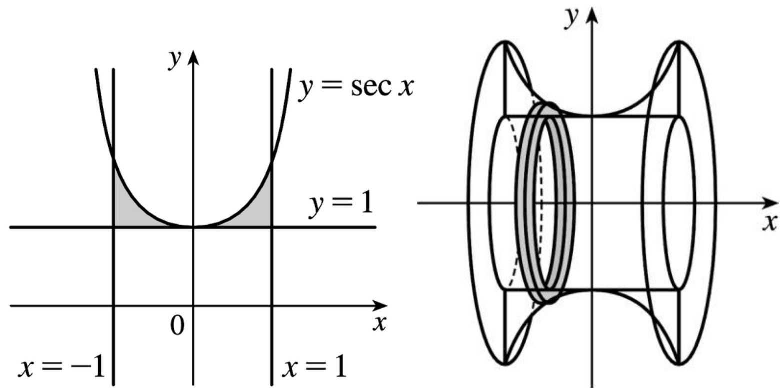
Se encuentra que el volumen de S es

$$V(S) = \int_0^1 \pi(y - y^2)^2 dy = \frac{\pi}{30}$$

Por lo tanto, el volumen de S es de $\frac{\pi}{30}u^3$.

(b) $y = secx; y = 1;\ x = -1;\ x = 1\ alrededor\ del\ eje\ x$

<u>SOLUCION</u>. En la siguiente figura se muestra a la región y al sólido S que se forma junto con un anillo o roldana característica



Para resolver a este ejercicio vamos a utilizar precisamente el método de los anillos. El área de la sección transversal de este anillo está dada por

$$A(x) = \pi\{[r_2]^2 - [r_1]^2\} = \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}$$

Donde el radio interior y exterior de este anillo característico están dados por

$$r_1 = g(x) = 1 \; y \; r_2 = f(x) = secx$$

Por lo tanto, su volumen es

$$V(y) = A(x)dx = \pi\{sec^2x - 1\}dx$$

Y de esta manera, utilizando la fórmula

$$\int_a^b \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx$$

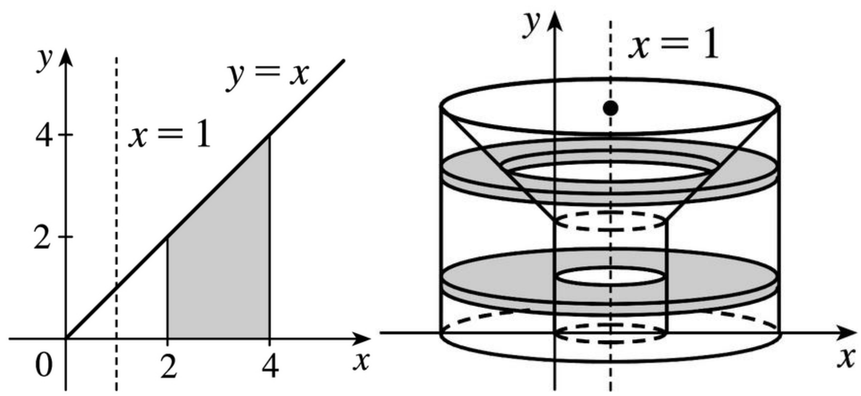
Se encuentra que

$$V(S) = \int_{-1}^{1} \pi\{sec^2x - 1\}dx = 2\pi(\tan(1) - 1)$$

Por lo tanto, el volumen de S es de $2\pi(\tan(1) - 1)u^3$

(c) $y = x; y = 0;\ x = 2;\ x = 4\ alrededor\ del\ eje\ x = 1$

<u>SOLUCION</u>. En la siguiente figura se muestra a la región y al sólido S que se forma junto con dos anillos o roldanas características



Como podemos observar, el volumen de este solido S se puede ver como la suma de los volúmenes $V(S_1)\ y\ V(S_2)$

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2)$$

Vamos pues a calcular el valor de cada uno de estos volúmenes y luego vamos a sumarlos para obtener el valor del volumen total $V(S)$. Primeramente notamos que el área de la sección transversal de cada uno de estos anillos se obtiene mediante la fórmula

$$A(y) = \pi\{[r_2]^2 - [r_1]^2\} = \pi\{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\}$$

Donde el radio interior y exterior del primer anillo (el de más abajo) está dada por

$$r_1 = g_1(y) = 2 - 1 = 1\ y\ r_2 = f_1(y) = 4 - 1 = 3$$

Por lo tanto, su volumen es

$$V_1(y) = A_1(y)dy = \pi\{3^2 - 1^2\}dy = 8\pi dy$$

Y de esta manera

$$V(S_1) = \int_0^2 A_1(y)dy = \int_0^2 8\pi dy = 16\pi *** (1)$$

Por otra parte, el radio interior y exterior del segundo anillo está dada por

$$r_1 = g(y) = y - 1 = 1\ y\ r_2 = f(y) = 4 - 1 = 3$$

Por lo tanto, su volumen es

$$V_2(y) = A_2(y)dy = \{3^2 - (y-1)^2\}\pi dy = (8 + 2y - y^2)\pi dy$$

Y de esta manera

$$V(S_2) = \int_2^4 A_2(y)dy = \int_2^4 (8 + 2y - y^2)\pi dy = \frac{28}{3}\pi *** (2)$$

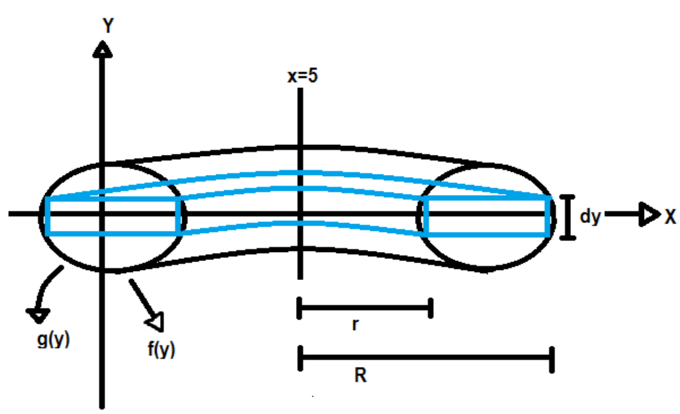
Finalmente, sumando los volúmenes dados por las expresiones (1) y (2) se llega a

$$V(S) = 16\pi + \frac{28}{3}\pi = \frac{76}{3}\pi$$

Por lo tanto, el volumen del sólido S es de $\frac{76}{3}\pi\, u^3$

d) $x^2 + y^2 = 1;\ alrededor\ de\ la\ recta\ x = 5.$

<u>SOLUCION</u>. METODO I. La siguiente figura, es parte de un corte transversal del sólido S que se genera. Primero vamos a considerar las funciones $f(y)$ & $g(y)$ que se muestran en la figura. Si empleamos el método de las arandelas, cortando el sólido de manera horizontal obtendremos anillos como a los que se indican.



$$Gráficas\ f(y) = \sqrt{1-y^2}\ \ y\ \ g(y) = -\sqrt{1-y^2}$$

Donde $R = radio\ exterior$; $r = radio\ interior$; $dy = altura$ y el volumen del anillo es

$$V = \pi R^2 dy - \pi r^2 dy = \pi(R^2 - r^2)\, dy$$

Pero, como se puede apreciar en las figuras anteriores

$$R = 5 - g(y) \ \ \& \ \ r = 5 - f(y)$$

De modo que:

$$V = \pi\left[\left(5 - g(y)\right)^2 - \left(5 - f(y)\right)^2\right] dy$$

$$= \pi\left[\left(5 + \sqrt{1 - y^2}\right)^2 - \left(5 - \sqrt{1 - y^2}\right)^2\right] dy$$

$$= \pi\left[\left(25 + 10\sqrt{1 - y^2} + 1 - y^2\right) - \left(25 - 10\sqrt{1 - y^2} + 1 - y^2\right)\right] dy$$

$$= \pi\left[25 + 10\sqrt{1 - y^2} + 1 - y^2 - 25 + 10\sqrt{1 - y^2} - 1 + y^2\right] dy$$

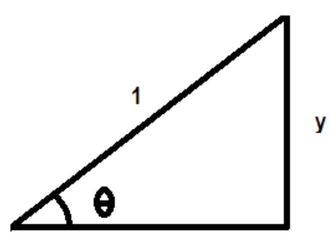
$$= \pi\left[20\sqrt{1 - y^2}\right] dy$$

$$= \boldsymbol{20\pi\sqrt{1 - y^2}dy}$$

Por lo tanto, el volumen de todo el sólido es la integral cuyo integrando es V y los límites de integración son $y = \ -1 \quad \& \quad y = 1$

$$V = \int_{-1}^{1} 20\pi\sqrt{1 - y^2}dy \ \ = 20\pi\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}dy \qquad *** \ (1)$$

La integral (1) se resuelve mediante sustitución trigonométrica. Para ello primero vamos a considerar el siguiente triángulo



$$\boldsymbol{\sqrt{1 - y^2}}$$

Donde

$$sen\ \theta = y$$
$$dy = cos\theta\ d\theta$$
$$cos\theta = \ \sqrt{1 - y^2}$$

Y sustituyendo en (1)

$$V = 20\pi \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - sen^2\theta}\right)(\cos\theta \, d\theta = 20\pi \int_{-1}^{1} (\cos\theta)(\cos\theta \, d\theta) = 20\pi \int_{-1}^{1} \cos^2\theta \, d\theta$$

Pero como $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$, entonces

$$V = 20\pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = 10\pi \int_{-1}^{1} d\theta + 10\pi = 10\pi\theta + 10\pi \left[\frac{1}{2}\ sen\ 2\theta\right] \Big|_{-1}^{1}$$

Pero, de acuerdo con el triángulo, $\theta = arc\ sen\ y$

$$sen\ 2\theta = 2\ sen\ \theta \cos\theta = 2y\sqrt{1 - y^2}$$

Entonces, nuestro resultado lo escribimos en términos de y

$$V = 10\pi\ arc\ sen\ y + 10\pi \left[\frac{1}{2} \cdot 2y\sqrt{1 - y^2}\right] \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 10\pi\ arc\ sen\ y + 10\pi y\sqrt{1 - y^2}\ \Big|_{-1}^{1}$$

Y finalmente evaluamos

$$V = \left[10\pi\ arc\ sen\ (1) + 10\pi(1)\sqrt{1 - (1)^2}\right] - \left[10\pi\ arc\ sen\ (-1) + 10\pi(-1)\sqrt{1 - (-1)^2}\right]$$

$$= \left[10\pi\left(\frac{\pi}{2}\right) + 10\pi\sqrt{0}\right] - \left[10\pi\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 10\pi\sqrt{0}\right]$$

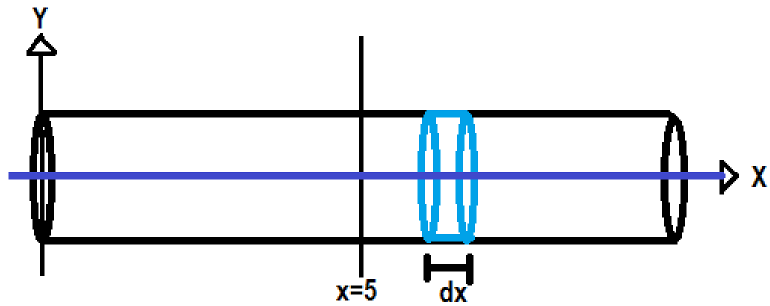
$$= 5\pi^2 - (-5\pi^2) = 5\pi^2 + 5\pi^2 = 10\pi^2$$

Por lo tanto, el volumen del sólido S es de $\boldsymbol{V = 10\pi^2\ u^3}$

METODO. II Imaginemos que se cortó el sólido y después se "endereza" formando un cilindro, se coloca este cilindro sobre el eje x de manera que uno de sus extremos quede justo en el origen y el otro en el lado positivo.

Para conocer los límites de integración, solo debemos determinar el perímetro del sólido, esto es $2\pi r$ donde r es la distancia desde el origen hasta la recta $x = 5$, como lo muestra la siguiente figura, por lo tanto $r = 5$. De esta manera tenemos que la circunferencia (o perímetro) del sólido es: $2\pi(5) = 10\pi$

Los límites de integración son entonces desde $x = 0$ hasta $x = 10\pi$.



Ahora, si rebanamos el cilindro formado, obtendremos pequeñas rebanadas de ancho dx y de área πr^2, y sabemos que el radio r de estos cilindros mide 1, así, el área de cada rebanada es:

$$A_R = \pi r^2 dx = \pi dx$$

Y el volumen del sólido será

$$V = \int_0^{10\pi} \pi dx = \pi \int_0^{10\pi} dx = \pi x \Big|_{0}^{10\pi} = \pi[10\pi - 0] = 10\pi^2$$

El resultado es $\boldsymbol{V = 10\pi^2 u^2}$, igual al que obtuvimos anteriormente.

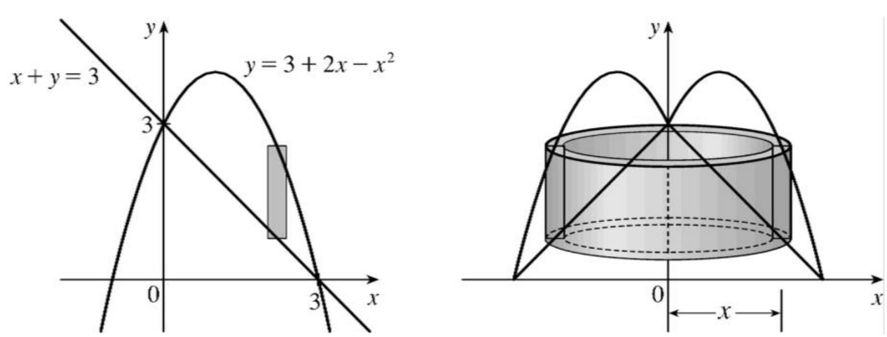
Utiliza el método de los cascarones cilíndricos para calcular el volumen generado al hacer girar la región acotada por las curvas dadas en el eje indicado.

a) $y = 3 + 2x - x^2; x + y = 3$ *alrededor del eje* y.

<u>**SOLUCION.**</u> Emplearemos la fórmula

$$V(S) = \int_a^b 2\pi x f(x) dx *** (1)$$

En la siguiente figura se muestra a la región y al sólido S que se forma junto con un cascarón cilíndrico característico



Como $x + y = 3$, entonces $y = 3 - x$ de manera que los puntos de intersección entre las curvas $y = 3 - x$ & $y = 3 + 2x - x^2$ ocurren cuando

$$3 - x = 3 + 2x - x^2$$

Lo cual se cumple para $x = 0 \; o \; x = 3$, sustituyendo estos valores en cualquiera de estas ecuaciones se obtiene que los puntos de intersección entre estas curvas son

$$P_0 = (0,3) \; y \; P_1 = (3,0)$$

El radio medio del cascarón cilíndrico que se indica tiene un valor de $r = x$, altura $h = (3 + 2x - x^2) - (3 - x) = 3x - x^2$. Y espesor dx. Por lo tanto, su volumen es

$$V(x) = 2\pi x(3x - x^2)dx$$

Utilizando la ecuación (1), se encuentra que

$$V(S) = \int_0^3 2\pi x(3x - x^2)dx = \frac{27}{2}\pi$$

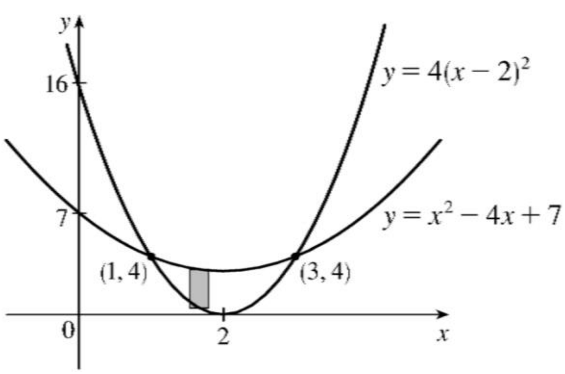
Y por lo tanto, el volumen del sólido $V(S)$ es de $\frac{27}{2}\pi \, u^3$.

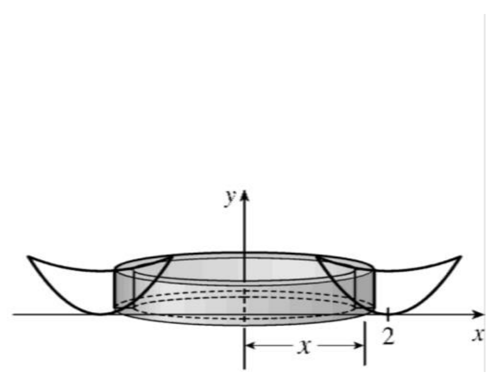
b) $y = 4(x-2)^2; y = x^2 - 4x + 7 \; alrededor \; del \; eje \; y.$

<u>SOLUCION.</u> Nuevamente emplearemos la fórmula

$$V(S) = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \; *** \; (1)$$

En la siguiente figura se muestra a la región y al sólido S que se forma junto con un cascarón cilíndrico característico





Los puntos de intersección entre las curvas $y = 4(x-2)^2$ & $y = x^2 - 4x + 7$ ocurren cuando

$$4(x-2)^2 = x^2 - 4x + 7$$

Lo cual se cumple para $x = 1$ o $x = 3$, sustituyendo estos valores en cualquiera de estas ecuaciones se obtiene que los puntos de intersección entre estas curvas son

$$P_0 = (1{,}4)\ y\ P_1 = (3{,}4)$$

El radio medio del cascarón cilíndrico que se indica tiene un valor de $r = x$, altura $h = (x^2 - 4x + 7) - 4(x-2)^2 = -3x^2 + 12x - 9$. Y espesor dx. Por lo tanto, su volumen es

$$V(x) = 2\pi x(3x^2 + 12x - 9)dx$$

Utilizando la ecuación (1), se encuentra que

$$V(S) = \int_1^3 2\pi x(3x^2 + 12x - 9)dx = 16\pi$$

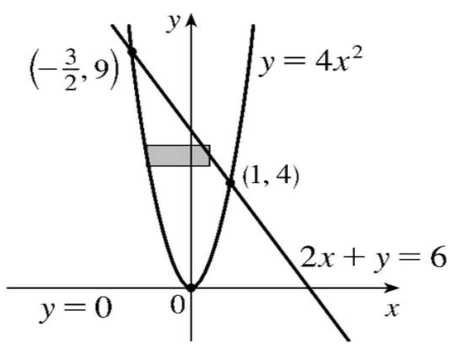
Y por lo tanto, el volumen del sólido $V(S)$ es de $16\pi\ u^3$.

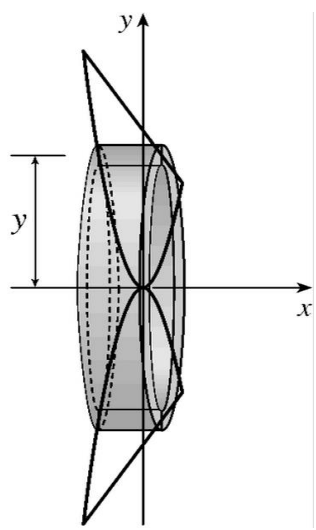
c) $y = 4x^2; y = -2x + 6$ $alrededor\ del\ eje\ y.$

SOLUCION. En este caso emplearemos la fórmula

$$V(S) = \int_c^d 2\pi y g(y) dy *** (1)$$

En la siguiente figura se muestra a la región y al sólido S que se forma junto con un cascarón cilíndrico característico





Como podemos observar, el volumen de este solido S se puede ver como la suma de los volúmenes $V(S_1)$ y $V(S_2)$ dados para $y \in [0,4]$ & $y \in [4,9]$

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2)$$

Vamos pues a calcular el valor de cada uno de estos volúmenes y luego vamos a sumarlos para obtener el valor del volumen total $V(S)$. Utilizando la fórmula (1).
Los puntos de intersección entre las curvas $y = 4x^2$; $y = -2x + 6$ ocurren cuando

$$4x^2 = -2x + 6$$

Lo cual se cumple para $x = 1$ o $x = -\frac{3}{2}$, sustituyendo estos valores en cualquiera de estas ecuaciones se obtiene que los puntos de intersección entre estas curvas son

$$P_0 = (1,4) \text{ } y \text{ } P_1 = \left(-\frac{3}{2}, 9\right)$$

Para usar el cascarón de la figura de este ejercicio ahora pasamos de $y = 4x^2$ a $x = \pm\frac{\sqrt{y}}{2}$ y de $y = -2x + 6$ a $x = \frac{y-6}{2}$.

El radio medio de un cascarón cilíndrico que va de $[0,4]$ tiene un valor de $r = y$, altura $h = \left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{y}}{2}\right) = \sqrt{y}$. Y espesor dy. Por lo tanto, su volumen es

$$V_1(y) = 2\pi y\left(\sqrt{y}\ \right)dx$$

Utilizando la ecuación (1), se encuentra que

$$V_1(S) = \int_0^4 2\pi y\left(\sqrt{y}\right)dy = \frac{128}{5}\pi *** (2)$$

Por otra parte, el radio medio de un cascarón cilíndrico que se encuentre en el intervalo $[4,9]$ tiene un valor de $r = y \in [4,9]$, altura $h = \left(\frac{y-6}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{y}}{2}\right) = \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} - 3$. Y espesor dy. Por lo tanto, su volumen es

$$V_2(y) = 2\pi y\left(\frac{y}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} - 3\right)dy$$

Y nuevamente, utilizando la ecuación (1), se encuentra que

$$V_2(S) = \int_4^9 2\pi\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y\sqrt{y}}{2} - 3y\right)dy = \frac{866}{15}\pi *** (3)$$

Por lo tanto, por (2) y (3), el volumen del sólido $V(S)$ es de $V_1(y) + V_2(y) = \frac{250}{3}\pi\, u^3$.

2.3 LONGITUD DE ARCO Y ÁREA DE SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

1.- Calcula el área de la superficie de revolución obtenida al hacer girar la siguiente curva alrededor del eje x:

a) $y = sen\, x;\ \ 0 \leq x \leq \pi$

SOLUCION. Emplearemos la fórmula

$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\ \ donde\ a = 0,\ \ b = \pi,$

$Como\ \ f(x) = sen\, x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

Por lo tanto

$$S = \int_0^{\pi} 2\pi\, sen\, x\sqrt{1+\cos^2 x}\ dx = 2\pi\int_0^{\pi} sen\, x\sqrt{1+\cos^2 x}\ dx \quad *** \ (1)$$

Esta integral se resuelve mediante sustitución trigonométrica:

Sea el triángulo

Donde:

$$\tan\theta = \cos x$$

$$\Rightarrow\ -sen\, x\, dx = \sec^2\theta\, d\theta$$

$$sen\, x\, dx = \ -\sec^2\theta\, d\theta$$

Sustituyendo en (1)

$S = 2\pi\int_0^{\pi}(-\sec^2\theta\, d\theta)\sqrt{1+\tan^2\theta}$, pero $\sqrt{1+\tan^2\theta} = \sec\theta$, entonces

$$S = 2\pi\int_0^{\pi}(-\sec^2\theta\, d\theta)(sec\theta) = \ -2\pi\int_0^{\pi}\sec^3\theta\ \ d\theta$$

Integrando por partes

Sea

$$u = \sec\theta \ \ \Rightarrow \ \ \ du = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$dv = \sec^2\theta\, d\theta \ \ \Rightarrow \ \ V = \int \sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta$$

Entonces

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \tan\theta\ (\sec\theta\tan\theta) d\theta$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\,(\tan^2\theta)\, d\theta$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\,(\sec^2\theta - 1) d\theta$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta\ \ d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$2\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\, d\theta$$

Pero $\sec\theta = \sec\theta \cdot \frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta} = \frac{\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$, de modo que:

$$\int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} d\theta$$

Haciendo $w = \sec\theta + \tan\theta \quad \Rightarrow \quad dw = (\sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta)\, d\theta$

Así:

$$\int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{w}\left(\frac{dw}{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}\right) = \int \frac{dw}{w} = Ln\,|w|$$

Pero como $w = \sec\theta + \tan\theta$

$$\Rightarrow \int \sec\theta = Ln\,|\sec\theta + \tan\theta|$$

Volviendo a la integral anterior

$$2\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + Ln\,|\sec\theta + \tan\theta|$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}Ln\,|\sec\theta + \tan\theta|$$

Por lo tanto

$$S = -2\pi\int_0^{\pi} \sec^3\theta\, d\theta = -2\pi\left[\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}Ln\,|\sec\theta + \tan\theta|\right]_0^{\pi}$$

Pero de acuerdo con nuestro triángulo

$$\sec\theta = \sqrt{1+\cos^2 x} \qquad \& \qquad \tan\theta = \cos x$$

Sustituyendo y evaluando obtenemos el valor buscado

$$S = -2\pi\left[\frac{1}{2}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x} + \frac{1}{2}Ln\left|\sqrt{1+\cos^2 x} + \cos x\right|\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi\left[\cos\pi\sqrt{1+\cos^2\pi} + Ln\left|\sqrt{1+\cos^2\pi}+\cos\pi\right|\right] - [\cos 0\sqrt{1+\cos^2 0} + Ln\left|\sqrt{1+\cos^2 0}+\cos 0\right|$$

$$= -\pi\left[(-1)\sqrt{1+1} + Ln\left|\sqrt{1+1}-1\right| - (1)\sqrt{1+1} - Ln\left|\sqrt{1+1}+1\right|\right]$$

$$= -\pi\left[-\sqrt{2} + Ln\left|\sqrt{2}-1\right| - \sqrt{2} - Ln\left|\sqrt{2}+1\right|\right]$$

$$= -\pi\left[-2\sqrt{2} + Ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+2}\right)\right] = 2\sqrt{2}\pi - \pi\, Ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

Finalmente, el área de la superficie es

$$S = \pi\left[2\sqrt{2} - Ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right] u^2 \;\approx\; 14.42\, u^2$$

b) $2y = 3x^{\frac{2}{3}}; \quad 1 \le x \le 8$

SOLUCION. Como $x \in [1,8]$, entonces al despejar y se obtiene que

$$y = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^3}$$

El área de la superficie viene dada por

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx \; *** \; (1)$$

Donde: $a = 1,\ b = 8,\ f(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}},\quad f'(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right] = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

Sustituyendo en la fórmula (1) nos da que

$$S = \int_1^8 2\pi\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2}\,dx$$

$$S = 3\pi\int_1^8 x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}dx \quad *** \; (1)$$

Empleamos sustitución trigonométrica para resolver la integral (1):
Consideremos el triángulo rectángulo

Donde:

$$\tan\theta = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \quad \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Luego:

$$x^{\frac{1}{3}} = ctg\ \theta \quad \Rightarrow \quad x = ctg^3\theta, \quad x^{\frac{2}{3}} = ctg^2\theta$$

$$dx = 3ctg^3\theta(-\csc^2\theta)\, d\theta$$

Sustituyendo datos en (1)

$$S = 3\pi\int_1^8 ctg^2\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}\,(-3\, ctg^2\theta\csc^2\theta\, d\theta)$$

Pero $\sqrt{1+\tan^2\theta} = \sec\theta$

$$S = 3\pi\int_1^8 (ctg^2\,\theta)(\sec\theta)\,(-3\, ctg^2\,\theta\csc^2\theta)\, d\theta$$

$$= -9\pi\int_1^8 ctg^4\theta\csc^2\theta\sec\theta\, d\theta = -9\pi\int_1^8 \frac{\cos^4\theta}{sen^4\,\theta}\cdot\frac{1}{sen^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\ d\theta$$

$$= -9\pi\int_1^8 \frac{\cos^3\theta}{sen^6\theta}\, d\theta$$

$$S = -9\pi\int_1^8 \frac{\cos\theta\,(1-sen^2\,\theta)}{sen^6\,\theta}\, d\theta \quad *** \,(2)$$

Sea $\alpha = sen\ \theta$, entonces $du = \cos\theta\, d\theta \quad \Longrightarrow \quad d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$

Sustituyendo en (2)

$$S = -9\pi\int_1^8 \frac{\cos\theta\,(1-u^2)}{u^6}\left(\frac{du}{\cos\theta}\right) = -9\pi\int_1^8 \frac{1-u^2}{u^6}du$$

$$= -9\pi\int_1^8\left(\frac{1}{u^6}-\frac{1}{u^4}\right)du = 9\pi\int_1^8 u^{-4}du - 9\pi\int_1^8 u^{-6}du$$

$$S = 9\pi\left(\frac{u^{-3}}{-3}\right) - 9\pi\left(\frac{u^{-5}}{-5}\right)\ \Big|_1^8 \quad ***\,(3)$$

Pero como $u = sen\ \theta$, entonces (3) se convierte en

$$S = \frac{9}{5}\pi\csc^5\theta - 3\pi\csc^3\theta\ \Big|_1^8 \quad ***\,(4)$$

Ahora, si observamos el triángulo rectángulo, notamos que

$$\csc\theta = \frac{\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{1}{3}}}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}}{\sqrt{x^{\frac{2}{3}}}} = x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}$$

Sustituyendo éste valor en (4)

$$S = \frac{9}{5}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}\right)^5 - 3\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}\right)^3 \quad \Big|_1^8$$

Finalmente evaluamos para hallar S

$$S = \left[\frac{9}{5}\pi(8)^{\frac{5}{3}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{(8)^{\frac{2}{3}}}}\right)^5 - 3\pi(8)\left(\sqrt{1+\frac{1}{(8)^{\frac{2}{3}}}}\right)^3\right] - \left[\frac{9}{5}\pi(1)^{\frac{5}{3}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{(1)^{\frac{2}{3}}}}\right)^5 - 3\pi(1)\left(\sqrt{1+\frac{1}{(1)^{\frac{2}{3}}}}\right)^3\right]$$

$$S = \frac{32(9)}{5}\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right)^5 - 24\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right)^3 - \frac{9}{5}\pi\left(\sqrt{2}\right)^5 + 3\pi\left(\sqrt{2}\right)^3$$

$$S = \frac{288}{5}\pi\sqrt{\frac{5}{4}}^5 - 24\pi\sqrt{\frac{5}{4}}^3 - \frac{9}{5}\pi\cdot 4\sqrt{2} + 3\pi\cdot 2\sqrt{2}$$

$$S = \left(\frac{288}{5}\right)\left(\frac{25}{16}\right)\sqrt{\frac{5}{4}}\pi - 24\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{36}{5}\sqrt{2}\pi + 6\sqrt{2}\pi$$

Haciendo operaciones, tenemos que el área del sólido que se obtiene es $\boldsymbol{S \approx 205.41\, u^2}$

c) $x = 1 + 2y^2; \quad 1 \le y \le 2$

SOLUCION. Como $x = 3$ cuando $y = 1$ y $x = 9$ cuando $y = 2$ entonces los límites de integración son desde $x = 3$ hasta $x = 9$, y como $x = 1 + 2y^2$, entonces

$$f(x) = y = \sqrt{\frac{x-1}{2}} = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Y el área se calcula con

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx *** (1)$$

$$S = \int_3^9 2\pi\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1 + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\ dx$$

$$S = 2\pi\int_3^9 \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x-1}\right)}dx$$

$$S = 2\pi\int_3^9 \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{8(x-1)}}dx$$

$$S = 2\pi\int_3^9 \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)\left[\frac{8(x-1)+1}{8(x-1)}\right]}dx = 2\pi\int_3^9 \sqrt{\frac{8x-8+1}{16}}\ dx$$

$$S = 2\pi\int_3^9 \frac{1}{4}\sqrt{8x-7}dx = \frac{1}{2}\pi\int_3^9 \sqrt{8x-7}dx$$

Sea: $u = 8x - 7, \quad du = 8dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{8}$

Sustituyendo en la ecuación de S

$$S = \frac{1}{2}\pi\int_3^9 \sqrt{u}\left(\frac{du}{8}\right) = \frac{1}{16}\pi\int_3^9 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{16}\pi\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}\right]_3^9$$

Pero $u = 8x - 7$

$$= \frac{1}{16}\pi\left[\frac{2}{3}(8x-7)^{\frac{3}{2}}\right]_{3}^{9}$$

Evaluando:

$$S = \frac{1}{24}\pi\left[(8(9)-7)^{\frac{3}{2}} - (8(3)-7)^{\frac{3}{2}}\right] \approx 59.42$$

Finalmente, el área de la superficie es $\boldsymbol{S \approx 59.42\ u^2}$**.**

UNIDAD TEMÁTICA 3

3.1 FORMAS INDETERMINADAS Y REGLA DE L´HOPITAL

Evalúa los siguientes límites

1.- $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-x^2+1} \right)$

SOLUCION. Este límite es una forma indeterminada del tipo $\infty-\infty$ así que lo reescribiremos como

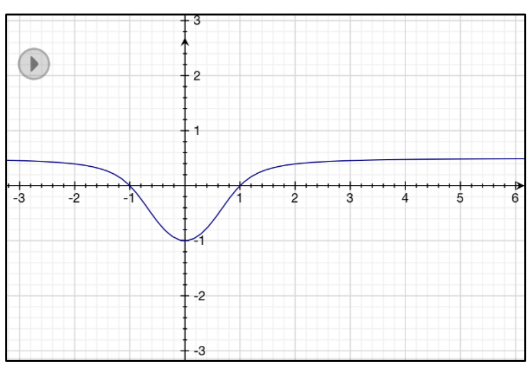
$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-x^2+1} \right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(x^2-\sqrt{x^4-x^2+1}\right)\frac{x^2+\sqrt{x^4-x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^4-x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+\sqrt{x^4-x^2+1}}\right)$$

Y ahora tiene la forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. No es necesario aplicar la regla de L´hopital para calcularlo ya que esto sería más largo. Simplemente hay que observar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+\sqrt{x^4-x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt{\frac{x^4-x^2+1}{x^4}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}\right)=\frac{1}{2}$$



$$y=x^2-\sqrt{x^4-x^2+1}$$

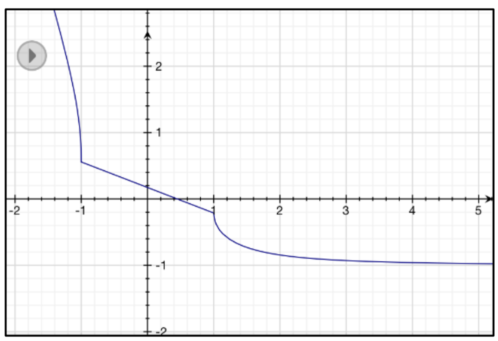
2.- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - arctanx}{\frac{1}{2}ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}; x > 1$

SOLUCION. Notemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - arctan\, x}{\frac{1}{2} ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - arctan\, x}{\frac{1}{2} ln\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

Este límite es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, así que de acuerdo con la regla de L´hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - arctan\, x}{\frac{1}{2} ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2-1}{x^2+1} = -1$$



$$y = \frac{\frac{\pi}{2} - arctanx}{\frac{1}{2} ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

3.- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}; a > 0, b > 0, b \neq 1$

SOLUCION. Se trata de una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ de modo que al aplicar la regla de L´hopital se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln(a)}{b^x \ln(b)} = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

Determina el valor de c para que la siguiente expresión sea verdadera

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x} = 4 *** (1)$$

SOLUCION. Como x tiende a infinito entonces se trata de una forma indeterminada del tipo 1^{∞} por lo tanto, sea

$$y = \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x} \Rightarrow \ln y = x\, ln\,\left(\frac{x+c}{x-c}\right) = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{ln\,\left(\frac{x+c}{x-c}\right)}{\frac{1}{x}}\right\}$$

De esta manera ahora tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ por lo cual al aplicar la regla de L´hopital nos da que

$$\lim_{x\to\infty}\{\ln y\} = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{ln\,\left(\frac{x+c}{x-c}\right)}{\frac{1}{x}}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\frac{-2c}{x^2-c^2}}{\frac{-1}{x^2}}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{2cx^2}{x^2-c^2}\right\}$$

Este último límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ por lo cual volveremos a aplicar la regla de L´hopital

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{2cx^2}{x^2-c^2}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{4cx}{2x}\right\} = 2c$$

Por lo tanto $\lim_{x\to\infty} lny = 2c$. Como el límite que deseamos es el de y para determinarlo vamos a utilizar el hecho de que $y = e^{lny}$ y también utilizaremos la continuidad de la función $f(u) = e^{u}$ en $u = 2c$. Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} e^{lny} = e^{\lim_{x\to\infty}\{lny\}} = e^{2c}$$

Pero de acuerdo a la expresión (1) esto significa que $e^{2c} = 4$. Lo cual implica que $c = \frac{ln4}{2}$.

4.- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tan3x}{tan5x}$

SOLUCION. Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, al aplicar la regla de L´hopital se tiene

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{tan3x}{tan5x}\right\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{3}{5}\frac{cos^2 5x}{cos^2 3x}\right\}$$

Este nuevo límite es del tipo $\frac{0}{0}$ asi que aplicando nuevamente la regla de L´hopital nos da

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{3}{5}\frac{cos^2 5x}{cos^2 3x}\right\}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{5}{3}\frac{sen10x}{sen6x}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{sen10x}{sen6x}\right\}$$

Otra vez se trata de un límite del tipo $\frac{0}{0}$ asi que aplicando la regla de L´hopital por tercera vez se obtiene

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{sen10x}{sen6x}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{5}{3}\frac{cos10x}{cos6x}\right\}=\frac{5}{3}$$

5.- Encuentra las constantes a y b tales que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-senx}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=1 *** (1)$$

SOLUCION. Primero hay que resolver la integral que aparece en (1)

$$\frac{1}{bx-senx}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=\frac{\frac{2}{15}\sqrt{a+x}(8a^2-4ax+3x^2)-\frac{2}{15}\sqrt{a}8a^2}{bx-senx} *** (2)$$

Como $x\to 0$, este cociente es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ de modo que al aplicar la regla de L´hopital obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{15}\sqrt{a+x}(8a^2-4ax+3x^2)-\frac{2}{15}\sqrt{a}8a^2}{bx-senx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{15}\sqrt{a+x}(-4a+6x)+\frac{8a^2-4ax+3x^2}{15\sqrt{a+x}}}{b-cosx}$$

Si suponemos que $b=1$, entonces este cociente nuevamente es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ de modo que al aplicar la regla de L´hopital una vez más obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{15}\sqrt{a+x}(-4a+6x)+\frac{8a^2-4ax+3x^2}{15\sqrt{a+x}}}{b-cosx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{5}\sqrt{a+x}-\frac{2}{15}\frac{4a-6x}{\sqrt{a+x}}-\frac{8a^2-4ax+3x^2}{30(a+x)^{\frac{3}{2}}}}{senx}$$

Y nuevamente se tiene que este cociente es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ de modo que al aplicar la regla de L´hopital por tercera ocasión obtenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{5}\sqrt{a+x}-\frac{2}{15}\frac{4a-6x}{\sqrt{a+x}}-\frac{8a^2-4ax+3x^2}{30(a+x)^{\frac{3}{2}}}}{senx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{10}\frac{4a-6x}{(a+x)^{\frac{3}{2}}}+\frac{6}{5\sqrt{a+x}}+\frac{8a^2-4ax+3x^2}{20(a+x)^{\frac{3}{2}}}}{cosx}=\frac{2}{\sqrt{a}}$$

Por lo tanto, se debe tener que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-senx}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=\frac{2}{\sqrt{a}}$$

Por la igualdad en (1) esto quiere decir que $\frac{2}{\sqrt{a}}=1$, de esta manera $a=4\ y\ b=1$.

3.2 INTEGRALES IMPROPIAS

Determina si las siguientes integrales son convergentes o divergentes

$1.-\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$

$2.-\displaystyle\int_1^\infty \frac{ln\ x}{x^2}\,dx$

<u>SOLUCION.</u> La integral (1) es impropia pues el integrando es discontinuo en el extremo $x=1$ y puesto que

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$$

Entonces primeramente vamos a resolver la integral $\int_0^t \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$. Para ello, sea $u=\sqrt{1-x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}dx\ y$ y de este modo

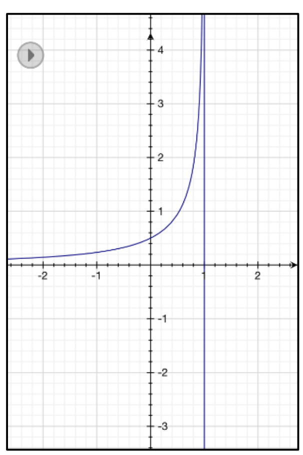
$$\int_0^t \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} = 2\int_1^{\sqrt{1-t}} \frac{1}{u^2+1}du = \arctan\sqrt{1-t} - \arctan(1)$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$\lim_{t\to 1}\left\{\arctan\sqrt{1-t} - \arctan(1)\right\} = \frac{\pi}{4}$$

Y así, se tiene que la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$ es convergente.



$$y = \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}; x = 1$$

<u>SOLUCION.</u> La integral (2) es impropia ya que en este caso el integrando es continuo en un intervalo de integración infinito, puesto que

$$\int_1^{\infty} \frac{ln\, x}{x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{ln\, x}{x^2}\, dx\, dx$$

Nuevamente, primero vamos a resolver la integral $\int_1^{t} \frac{ln\, x}{x^2}\, dx$. Lo haremos utilizando la integración por partes.

Para ello, sea $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx\ y\ dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$ y de este modo

$$\int_1^{t} \frac{ln\, x}{x^2}\, dx = \left\{-\frac{\ln x}{x}\right\}_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx$$

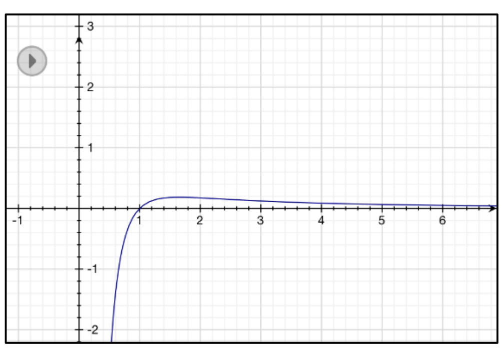
$$= \left\{-\frac{\ln x}{x}\right\}_1^t + \left\{-\frac{1}{x}\right\}_1^t = -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1$$

Por lo tanto

$$\int_1^{\infty} \frac{ln\, x}{x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{ln\, x}{x^2}\, dx\, dx$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1\right\} = \lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{1}{t} - \frac{1}{t} + 1\right\} = 1$$

Donde el cociente $\frac{\ln t}{t}$ es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Por lo tanto la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{ln\, x}{x^2}\, dx$ también es convergente.



$$y = \frac{ln\ x}{x^2}$$

3.- Evalúa la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx *** (1)$$

SOLUCION. La integral (1) es impropia por dos razones: el intervalo $[0, \infty)$ es infinito y el integrando $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ no está acotado en cero. Para evaluarla vamos a expresarla como una suma de integrales impropias dada de la siguiente manera

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx\ dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$$

Para garantizar la convergencia de la integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$ es necesario garantizar que cada una de las siguientes integrales es convergente

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx *** (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx *** (3)$$

La integral (2) es impropia pues el integrando $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ no está acotado en 0. Y puesto que

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{t \to 0} \int_t^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$$

Entonces, primero vamos a resolver la integral $\int_t^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$. Para ello, sea $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, de este modo

$$\int_t^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx = 2\int_{\sqrt{t}}^{1} \frac{1}{1+u^2}\ du$$

$$2\{\arctan(1) - \arctan\sqrt{t}\}$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$$

$$= \lim_{t\to 0} 2\{\arctan(1) - \arctan\sqrt{t}\} = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} *** \ (4)$$

Por lo tanto la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$ es convergente. Por otra parte, la integral (3) es impropia puesto que el integrando $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ es continuo en un intervalo de integración infinito. Ahora vamos a calcular el siguiente límite.

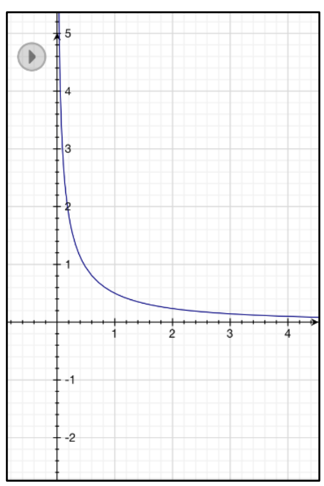
$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$$

Utilizando los resultados anteriores obtenemos

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} 2\{\arctan(t) - \arctan(1)\} = 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2} *** \ (5)$$

Por lo tanto la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ también es convergente y por (4) y (5) se concluye que $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx\ dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx = \pi$



$$y = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

UNIDAD TEMÁTICA 4

4.1 SUCESIONES

Determina si cada una de las siguientes sucesiones cuyo término general es el que se indica son monótonas o si están acotadas.

1.- $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

SOLUCION. Para ver que la sucesión a_n es monótona decreciente debemos probar que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $a_{n+1} \leq a_n$. Esto quiere decir que se debe cumplir la siguiente desigualdad: $\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Pero como

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$(n+1)\sqrt{n+1} \leq (n+2)\sqrt{n} \Leftrightarrow$$

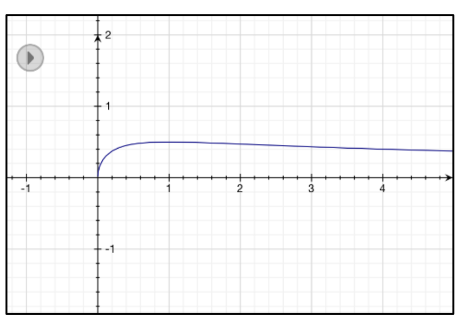
$$(n+1)^2(n+1) \leq (n+2)^2 n \Leftrightarrow$$

$$(n+1)^3 \leq (n+2)^2 n \Leftrightarrow$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + 4n^2 + 4n \Leftrightarrow$$

$$1 \leq n^2 + n$$

Entonces esta cadena de desigualdades es cierta, de manera que se cumple que $a_{n+1} \leq a_n$ y por lo tanto la sucesión dada por el término $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ es monótona decreciente. Otra alternativa para obtener esta misma conclusión es mostrando que el signo de la derivada de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ es negativa en el intervalo $[1, \infty)$ y por lo tanto se tiene que f es decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Por otra parte es fácil probar que $0 < \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ y por lo tanto la sucesión está acotada inferior y superiormente.



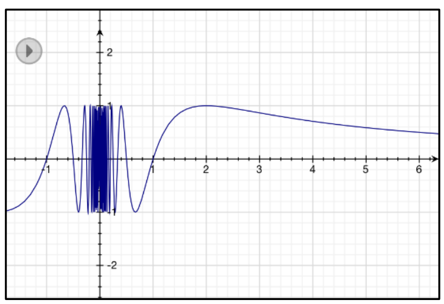
$$y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

2.- $a_n = n + 1$

SOLUCION. Claramente se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$ y por la tanto por lo tanto la sucesión dada por el término $a_n = n + 1$ es monótona creciente. Por otra parte es fácil probar que $2 \leq a_n < \infty$ y por lo tanto está sucesión solamente está acotada inferiormente pero no superiormente.

3.- $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

En este caso se puede observar que los números a_n son a veces mayores y a veces menores; en otras palabras se tiene que es falso que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $a_n \leq a_{n+1}$ o bien que $a_{n+1} \leq a_n$ pues no siempre crecen o decrecen sus términos. Se sabe que la sucesión oscila en torno a su valor límite cero, además se dice que esta sucesión es **no monótona**. Sin embargo se cumple que $-\frac{1}{2} \leq a_n < 0 \; y \; 0 < a_n \leq 1$.
Algo parecido puede decirse de la sucesión cuyo término general está dado por $a_n = sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$. En este caso se cumple que $-1 \leq a_n < 0 \; y \; 0 < a_n \leq 1$.



$y = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

SOLUCION.

Límite de Sucesiones

Establece la validez de los siguientes resultados

1.- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$

SOLUCION. Este límite se puede reescribir así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}$$

Y ahora utilizamos el teorema para calcular la suma producto y cociente de sucesiones convergentes para obtener la siguiente igualdad

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\{1\}+\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}-\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\right\}}{\lim\limits_{n\to\infty}\{3\}+\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\right\}}=\frac{1+0-0}{3+0}=\frac{1}{3}$$

2.- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}=0$

<u>SOLUCION.</u> Dividimos al numerador y al denominador de esta sucesión entre 4^n y así

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}$$

Y ahora nuevamente vamos a utilizar el teorema para calcular la suma producto y cociente de sucesiones convergentes para calcular este límite.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right\}}$$

Como $\left|\frac{2}{4}\right|=\frac{2}{4}<1\ y\ \left|\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}<1$ entonces se concluye que

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right\}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^n+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\lim\limits_{n\to\infty}\{1\}}=\frac{0+0}{0+1}=0$$

3.- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n=0$

<u>SOLUCION.</u> Si racionalizamos a la expresión $\sqrt{n^2+1}-n$. Nos queda

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}=0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n+n^2} = 1$

SOLUCION. Vamos a utilizar el teorema de compresión. Para ello vamos a utilizar la siguiente desigualdad

$$1 < \sqrt[n]{1+n+n^2} \leq \sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3(n.n)} = \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}$$

Por lo tanto

$$1 < \sqrt[n]{1+n+n^2} \leq \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}$$

Y de esta manera

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 < \lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt[n]{1+n+n^2}\right\} \leq \lim_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}\} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

De donde se sigue que

$$1 < \lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt[n]{1+n+n^2}\right\} \leq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n+n^2} = 1$$

Este resultado también puede obtenerse utilizando la regla de L´hopital.

4.- $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right\} = \frac{1}{2}$

SOLUCION. En este caso solamente hay que fijarnos en las siguientes igualdades

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\{1+2+3+\cdots+n\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\} = \frac{1}{2}$$

5.- $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\} = 1$

SOLUCION. Fijemos nuestra atención solamente en la siguiente expresión

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

De todos los sumandos que ahí aparecen, el más grande de ellos es $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ y el más pequeño de ellos es $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ por lo cual se cumplen las siguientes desigualdades

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
$$<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

O sea

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} *** \ (1)$$

Un análisis similar nos indica que también se cumple lo siguiente

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} *** \ (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}}<a_n<\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}$$

Y

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}}<\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}=1$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

4.2 SERIES

CONVERGENCIA DE SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

Determine si las siguientes series convergen o divergen. En caso de que converja, calcule la suma.

1.- $4+\frac{8}{5}+\frac{16}{25}+\frac{32}{125}+\cdots$

<u>SOLUCION.</u> Esta serie se puede escribir así

$$4+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}=4+4\left[\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]$$

Y Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$ es una serie geométrica donde $r=\frac{2}{5}$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}$$

Por lo tanto la serie converge y

$$4+\frac{8}{5}+\frac{16}{25}+\frac{32}{125}+\cdots=4+4\left[\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]=4+4\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{20}{3}$$

2.- $\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

<u>SOLUCION.</u> Sea $k=n-1$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=5\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}$$

Donde la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}$ es una serie geométrica con $r=\frac{2}{3}$, por lo tanto es convergente y

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

Consecuentemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^{k} = 5(3) = 15$$

3.-$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

SOLUCION. Podemos reescribir esta serie como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^{n-1}}$$

Y nuevamente haciendo $k = n - 1$ se tiene

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^{n-1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k}}{4^{k}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^{k}$$

Notemos que como además $\left|\frac{-3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$ entonces esta última serie es geométrica con $r = \frac{-3}{4}$.
Por lo cual es convergente y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^{k} = \frac{1}{1 - \left(\frac{-3}{4}\right)} = \frac{4}{7}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^{k} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{7}$$

4.-$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{ln(1+2e^n)}$

SOLUCION. Antes de aplicar algún criterio particular para estudiar la convergencia de esta serie una técnica que nos puede resultar de utilidad para esta y muchas otras series es estudiar primero el comportamiento del límite de su término general, en este caso se trata del límite

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n}{ln(1+2e^n)}\right\}$$

Si este es igual a cero entonces escogeremos algún criterio. Pero si no lo es entonces esta serie será divergente. Para decir algo al respecto de este límite vamos a considerar antes la información que nos da este otro límite

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x}{ln(1+2e^x)}\right\};x\in[1,\infty)$$

Como podemos observar se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ por lo cual podemos aplicar la regla de L´hopital para obtener lo siguiente

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x}{ln(1+2e^x)}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1+2e^x}{2e^x}\right\}$$

Este otro límite también resulta ser una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, pero una segunda aplicación de la regla de L´hopital nos da

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1+2e^x}{2e^x}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{2e^x}{2e^x}\right\}=1$$

Y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{ln(1+2e^n)}\right\}=1\neq 0$$

Como el término general de esta serie no converge a cero entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{ln(1+2e^n)}$ es divergente.

5.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+5}$

<u>SOLUCION.</u> Para el término general de esta serie se sabe que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+5}=1\neq 0$$

Por lo tanto el término general de esta serie no converge a cero y de esta manera, la serie es divergente.

6.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

SOLUCION. Nuevamente consideremos el término general de esta serie: $\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$ Se sabe que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{1+n^2}}=1\neq 0$$

Por lo tanto el término general de esta serie tampoco converge a cero y de esta manera esta serie también es divergente.

7.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

SOLUCION. Podemos descomponer al término general de esta serie como

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+2)}$$

Y así reescribirla como la serie telescópica siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+2)}\right\}$$

Ahora vamos a estudiar la convergencia de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+2)}\right\}$. Tenemos que el término general de la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+2)}\right)$$

O sea

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}\right\}=\frac{3}{2}$$

Entonces la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de esta serie es convergente y por lo tanto se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+2)}\right\}=\frac{3}{4}$$

8.- $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{\mathrm{n(n+1)}}+\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}\right\}$

<u>SOLUCION.</u> Por la propiedad distributiva de la notación de sumatoria se cumple la siguiente igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{\mathrm{n(n+1)}}+\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\mathrm{n(n+1)}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}$$

Para comprobar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{\mathrm{n(n+1)}}+\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}\right\}$ es convergente hay que comprobar que cada una de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\mathrm{n(n+1)}}***(1)\ \ y\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}***(2)$$

Son convergentes. Para la serie (1) se tiene lo siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\mathrm{n(n+1)}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}$$

De esta manera, el término de la sucesión de sumas parciales de la serie (1) es

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

O sea

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{n+1}\right\}=1$$

Entonces la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de esta serie es convergente y por lo tanto se concluye que la serie (1) es convergente y que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}=3(1)=3$$

Por otra parte, para la serie (2) se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Y como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es una serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1$$

Como las series (1) y (2) son convergentes se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right\}$ es convergente y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 + 1 = 4$$

9.- $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

SOLUCION. Para comprobar la convergencia o la divergencia de esta serie vamos a estudiar la convergencia o divergencia de su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. El término general de esta sucesión es

$$S_n = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln\left(\frac{2}{3}\right) + ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = ln\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1}\right) = ln\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)$$

Por lo tanto

$$S_n = ln\left(\frac{n!}{n!\,(n+1)}\right) = ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Y como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ln\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\} = -\infty$$

Entonces la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de esta serie es divergente y por lo tanto se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ es divergente.

4.3 PRUEBAS DE COMPARACIÓN

Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes.

1.-$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

SOLUCION. Es claro que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2n^2}} < \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$$

Y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es una serie divergente entonces por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$ es divergente.

2.-$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

SOLUCION. En este caso observamos que

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{n^2+2n} < \frac{1}{n^2}$$

Y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ es una serie convergente entonces por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ es convergente.

3.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

SOLUCION. Para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad

$$2^{n-1} \leq n!$$

Y por lo tanto

$$0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Para ver que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Es convergente basta poner $k = n - 1$ y de esta forma se ve que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Es una serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$ la cual ya sabemos que converge. Entonces por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$

SOLUCION. Se sabe que para toda $x \in \mathbb{R}$

$$-1 \le sen(x) \le 1$$

Entonces en particular para $x = 1/n$ se cumple que

$$-1 \le sen\left(\frac{1}{n}\right)$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$ es una serie divergente entonces por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$ es divergente.

5.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{ln(1+2e^n)}$

SOLUCION. En este caso tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\frac{1}{3n} = \frac{n}{3n^2} \le \frac{n}{2+n} < \frac{n}{\ln(3)+n} = \frac{n}{ln(3e^n)} < \frac{n}{ln(1+2e^n)}$$

Y por lo tanto

$$\frac{1}{3n} \le \frac{n}{ln(1+2e^n)}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es una serie divergente entonces por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{ln(1+2e^n)}$ es divergente.

4.4 CRITERIO DE LA INTEGRAL

Utiliza el criterio de la integral para determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes.

1.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+9}$

SOLUCION. Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+9}$. Como f es continua y $f' < 0$ en el intervalo $(1, \infty)$ entonces f es decreciente y toma valores positivos en el intervalo $[1, \infty)$ por lo tanto, podemos aplicar el criterio de la integral, y como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+9} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{x}+9} dx$$

Entonces primero vamos a resolver la siguiente integral

$$\int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{x}+9} dx$$

Haciendo $u = \sqrt{x}$ se encuentra que

$$\int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{x}+9} dx = \{2[u - 9ln(u+9)]\}_1^{\sqrt{t}} = 2\left[\sqrt{t} - 9ln\left(\sqrt{t}+9\right)\right] - 2[1 - 9ln(10)]$$

Y de esta manera

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+9} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{x}+9} dx = \lim_{t\to\infty} 2\left[\sqrt{t} - 9ln\left(\sqrt{t}+9\right)\right] - 2[1 - 9ln(10)]$$

Como este límite no existe se concluye que la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+9} dx$ es divergente y por el criterio de la integral, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+9}$ es divergente.

2.- $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n^2}$

SOLUCION. Sea $f(x) = x2^{-x^2}$. Como f es continua y $f' < 0$ en el intervalo $(1, \infty)$ entonces f es decreciente y toma valores positivos en el intervalo $[1, \infty)$, por lo tanto, podemos aplicar el criterio de la integral. En este caso

$$\int_1^{\infty} x2^{-x^2} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x2^{-x^2} dx$$

Primero vamos a resolver la siguiente integral

$$\int_1^{t} x2^{-x^2} dx$$

Haciendo $u = -x^2$ se encuentra que

$$\int_1^t x2^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{-t^2} 2^u du = \frac{1}{2}\int_{-t^2}^{-1} 2^u du = \frac{1}{2}\left\{\frac{2^{-1}}{ln(2)} - \frac{2^{-t^2}}{ln(2)}\right\}$$

Y de esta manera

$$\int_1^\infty x2^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x2^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{2^{-1}}{ln(2)} - \frac{2^{-t^2}}{ln(2)}\right\} = \frac{1}{ln(16)}$$

Como este límite existe se concluye que la integral impropia $\int_1^\infty x2^{-x^2}dx$ converge y por el criterio de la integral, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n^2}$ es convergente.

3.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2}$

<u>SOLUCION.</u> Sea $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2}$. Entonces f es continua y decreciente por ser $f' < 0$ en el intervalo $(1, \infty)$, entonces f toma valores positivos en el intervalo $[1, \infty)$ y nuevamente, podemos aplicar el criterio de la integral.

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\arctan(x)}{x^2}\, dx$$

Primero vamos a resolver la siguiente integral

$$\int_1^t \frac{\arctan(x)}{x^2}\, dx$$

Lo haremos mediante integración por partes.

Sea $u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}$ y $dv = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$, entonces

$$\int_1^t \frac{\arctan(x)}{x^2}\, dx = -\left\{\frac{\arctan(x)}{x}\right\}_1^t + \int_1^t \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx \;***\; (1)$$

Y para la integral

$$\int_1^t \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx$$

Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2x$ y entonces la integral (1) se puede reescribir así

$$\int_1^t \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx = -\left\{\frac{\arctan(x)}{x}\right\}_1^t + \frac{1}{2}\int_1^{t^2} \frac{1}{u(1+u)}du$$

$$= -\left\{\frac{\arctan(x)}{x}\right\}_1^t + \frac{1}{2}\int_1^{t^2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)du$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(t)}{t} + \frac{1}{2}\left[ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right) + \ln(2)\right]$$

Y de esta manera

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(t)}{t} + \frac{1}{2}\left[ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right) + \ln(2)\right]\right\} = \frac{1}{4}\{\pi + \ln(4)\}$$

Nótese que el cociente $\frac{\arctan(t)}{t}$ es una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Como este límite existe se concluye que la integral impropia $\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$ converge y por el criterio de la integral, la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{\arctan(n)}{n^2}$ es convergente.

4.5 SERIES ALTERNANTES

Para resolver los siguientes ejercicios vamos a utilizar el siguiente criterio de convergencia para series alternantes

Teorema. Si la serie alternante $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots;\ b_n > 0$satisface las siguientes condiciones

(i) Los términos $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ forman una sucesión decreciente, o sea $b_{n+1} \le b_n\ para\ toda\ n \in \mathbb{N}$ y
(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
Entonces la serie alternante es $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} b_n$ convergente.

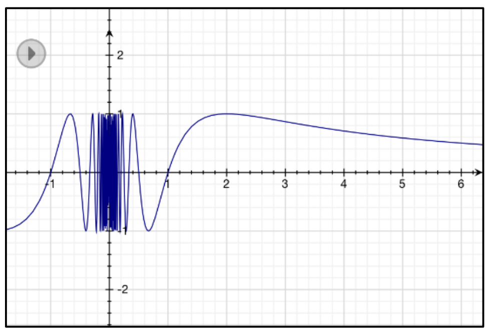
Establece la convergencia o divergencia de las siguientes series

1.- $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$

SOLUCION. Sea $b_n = f(n) = sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, para poder mostrar que se cumple (i) hay que mostrar que la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ es decreciente para toda $x \geq 1$. Para ello vamos a estudiar el signo de la derivada de f. Tenemos que

$$f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\ donde\ -\frac{\pi}{x^2} < 0\ para\ toda\ x \geq 1$$

Como $x \in [1,2]$ entonces se observa que $\frac{\pi}{x} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de esta manera, la función $g(x) = cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 0$ para toda $x \in [1,2]$ y $g(x) = cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \geq 0$, para toda $x \in [2,\infty)$, o sea, para toda $\frac{\pi}{x} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ entonces se cumple que $f'(x) \geq 0$ para toda $x \in [1,2]$ y $f'(x) \leq 0$ para toda $x \in [2,\infty)$. Por lo tanto se cumple que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente solamente para toda $n \in [2,\infty)$.



$$f(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Para mostrar que para toda $x \in [2,\infty)$ se cumple (ii) vamos a utilizar la continuidad de la función $f(u) = sen(u)$ en $u = 0$. En este caso

$$\lim_{x\to\infty}\left\{sen\left(\frac{\pi}{x}\right)\right\} = sen\left\{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right\} = sen(0) = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left\{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\} = 0$$

Y de esta manera, la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$ es convergente.

2.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosn\pi}{n^{3/4}}$

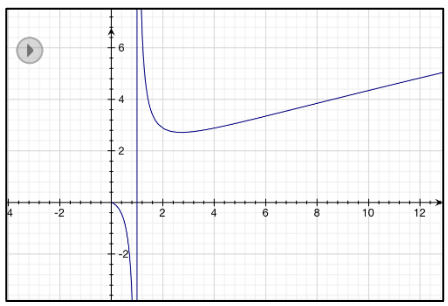
SOLUCION. En este caso observamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosn\pi}{n^{3/4}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$, de este modo tomamos a $b_n = f(n) = \frac{1}{n^{3/4}}$, es claro que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple (i) y como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/4}} = 0$ entonces también se cumple (ii). De esta manera, la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosn\pi}{n^{3/4}}$ es convergente.

3.- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\ln(n)}$

SOLUCION. Sea $b_n = f(n) = \frac{n}{\ln(n)}$ para poder mostrar que se cumple (i) hay que mostrar en cuales subintervalos de $\mathbb{R}$ que la función $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ es creciente o decreciente. Para ello nuevamente vamos a estudiar el signo de la derivada de f. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\{\ln(x)\}^2}$$

De donde se obtiene que $f'(x) \leq 0$ si $x \in (1, e]$ y $f'(x) \geq 0$ si $x \in [e, \infty)$. De esta manera, la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n}{\ln(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente para toda $n \in (1, e]$ y creciente si $n \in [e, \infty)$. Por lo tanto la condición (i) no se cumple y de esta manera se tiene que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\ln(n)}$ es divergente.



$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

4.5 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y PRUEBAS DEL COCIENTE Y DE LA RAIZ

Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente

SOLUCION. Vamos a utilizar el criterio del cociente para resolver los ejercicios 1 y 2.

1.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

Sea $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$, entonces de acuerdo con el criterio del cociente tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{\ln(n)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} |(-1)| \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}} = 1$$

Notemos que el cociente $\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$ Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Como $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ entonces se concluye que el criterio del cociente no nos proporciona ninguna información acerca de la convergencia absoluta o de la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

2.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$

Sea $a_n = \frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$, en este caso

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)(-3)^{n+1}}{4^n}}{\frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\ \frac{3(n+1)}{4n}\right|$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)\ \frac{3}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\} = \frac{3}{4}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{4} < 1$ entonces por el criterio del cociente la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$ es absolutamente convergente.

A continuación vamos a utilizar el criterio de la raíz para resolver los ejercicios 3 y 4.

3.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\arctan n)^n}$

<u>SOLUCION.</u>

Sea $a_n = \frac{(-1)^n}{(\arctan n)^n}$, de acuerdo con el criterio de la raíz tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(\arctan n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\arctan n}\right\} = \frac{2}{\pi}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\pi} < 1$ entonces por el criterio de la raíz la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\arctan n)^n}$ es absolutamente convergente.

4.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

SOLUCION.

Sea $a_n = \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$, de acuerdo con el criterio de la raíz tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{10}{(n+1)4^{2+1/n}}\right\} = \infty$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty > 1$ entonces por el criterio de la raíz la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ es divergente.

4.6 SERIES DE POTENCIAS

Hallar el radio y el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series donde hemos tomado $a = 0$.

1.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Sea $a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, entonces: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)|x| = 1.|x|$

De acuerdo con el criterio del cociente, la serie dada converge si $1.|x| < 1$ por lo tanto, el radio de convergencia de esta serie será $R = 1$ por lo cual el intervalo de convergencia de esta serie es el intervalo $(-1, 1)$, para saber que pasa en los extremos notamos que si tomamos $x = 1$ entonces la serie dada se transforma en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ la cual es divergente y si tomamos $x = -1$ se tratara de una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ de acuerdo al criterio de series alternantes. Por lo tanto, el intervalo de convergencia de esta serie es $[-1,1)$.

2.- $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

SOLUCION.

Sea $a_n = nx^n$, de acuerdo con el criterio de la raíz tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nx^n|} = \lim_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{n}|x|\} = 1.|x|$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.|x|$ entonces por el criterio de la raíz la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ converge si $1.|x| < 1$ por lo tanto, el radio de convergencia de esta serie será $R = 1$ por lo cual en principio se tiene que el intervalo de convergencia de esta serie es el intervalo $(-1, 1)$, en el extremo $x = 1$ la serie dada se transforma en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ la cual es divergente y si tomamos $x = -1$ se trata de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ cuya sucesión de términos positivos $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ no es decreciente. Y de acuerdo al criterio de series alternantes, esta serie es divergente. Por lo tanto, el intervalo de convergencia de la serie$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ es $(-1, 1)$.

3.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n4^n x^n$

SOLUCION.

Sea $a_n = (-1)^n n4^n x^n$, nuevamente, de acuerdo con el criterio de la raíz tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n4^n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \{4\sqrt[n]{n}|x|\} = 4.|x|$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4|x|$ entonces por el criterio de la raíz la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n4^n x^n$ converge si $4|x| < 1$ por lo tanto, esta serie será convergente cuando $|x| < 1/4$ y el radio de convergencia de esta serie será $R = 1/4$. En principio se considera que el intervalo de convergencia de esta serie es el intervalo $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, si tomamos $x = -1/4$ la serie dada se transforma en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ la cual es divergente y si tomamos $x = 1/4$ se trata de la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ cuya sucesión de términos positivos $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ no es decreciente. Y de acuerdo al criterio de series alternantes, esta serie es divergente. Por lo tanto, el intervalo de convergencia de la serie$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ queda como $(-1, 1)$.

4.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}$

SOLUCION. Sea $a_n = \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{3^n x^n}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n+1}{\mathrm{n}+2}\right)^2 |x| = 3|x|$$

De acuerdo con el criterio del cociente, la serie dada converge si $3|x| < 1$, es decir, cuando $|x| < 1/3$. Por lo tanto, el radio de convergencia de esta serie será $R = 1/3$ por lo cual en principio el intervalo de convergencia de esta serie es el intervalo $(-1/3, 1/3)$, para saber que pasa en los extremos notamos que si tomamos $x = -1/3$ entonces la serie dada se transforma en la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ cuya sucesión de términos positivos $\left\{\frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y converge a cero. De acuerdo al criterio de series alternantes, esta serie es convergente. Si tomamos $x = 1/3$ se tratara de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ la cual es claramente convergente. Por lo tanto, el intervalo de convergencia de esta serie es $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Hallar el radio y el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series donde ahora hemos tomado $a \neq 0$.

1.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}$

SOLUCION. Sea $a_n = \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}}{\frac{2^n(x-3)^n}{n+3}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1}(n+3)(x-3)^{n+1}}{2^n(n+4)(x-3)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3| = 2|x-3|$$

De acuerdo con el criterio del cociente, la serie dada converge si $2|x-3|<1$, o sea, cuando $|x-3|<1/2$. Por lo tanto, el radio de convergencia de esta serie donde $a=3$ será $R=1/2$ por lo cual en principio el intervalo de convergencia de esta serie es el intervalo $(5/2, 7/2)$, para saber que pasa en los extremos notamos que si tomamos $x=5/2$ entonces la serie dada se transforma en la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$ cuya sucesión de términos positivos $\left\{\frac{1}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tomada de su término general, es decreciente y converge a cero. De acuerdo al criterio de series alternantes, esta serie es convergente. Si tomamos $x=7/2$ se tratara de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ la cual es divergente. Por lo tanto, el intervalo de convergencia de esta serie es [5/2, 7/2).

2.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n^3}$

SOLUCION. Se observa que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}^n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}.$$

De esta manera, escogemos $a_n=\frac{2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}$, y de acuerdo con el criterio de la raíz tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{\sqrt[n]{n^3}}\left|x-\frac{1}{2}\right|\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}}\left|x-\frac{1}{2}\right|\right\}=2\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

Como $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=2\left|x-\frac{1}{2}\right|$ entonces por el criterio de la raíz la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}$ converge si $2\left|x-\frac{1}{2}\right|<1$ por lo tanto, esta serie será convergente cuando $\left|x-\frac{1}{2}\right|<1/2$ y así, el radio de convergencia de esta serie será $R=1/2$ por lo que en principio se considera que el intervalo de convergencia de esta serie es el intervalo $(0,1)$, si tomamos $x=0$ la serie dada se transforma en la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ la cual es convergente. Si tomamos a $x=1$ entonces se trata de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ y esta serie también es convergente. Por lo tanto, el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}$ queda como $[0,1]$.

4.7 REPRESENTACION DE FUNCIONES COMO SERIES DE POTENCIAS

4.7.1 SERIES DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

Forma la serie de Maclaurin de la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ con la definición de una serie de Maclaurin, supón que f tiene un desarrollo en serie de potencias. [No demuestres que $R_n(x)\to 0$]. Encuentra el radio de convergencia de f.

SOLUCION. Primero ordenamos nuestros cálculos para $n=0,1,2,\ldots$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$	$f(0)=1$
$f'(x)=-\dfrac{1}{(1+2x)^{3/2}}$	$f'(0)=-1$
$f''(x)=\dfrac{3}{(1+2x)^{5/2}}$	$f''(0)=3$
$f'''(x)=-\dfrac{3.5}{(1+2x)^{7/2}}$	$f'''(0)=-3.5$
$f^{(4)}(x)=\dfrac{3.5.7}{(1+2x)^{9/2}}$	$f^{(4)}=3.5.7$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+2}\dfrac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{(1+2x)^{(2n+1)/2}}$	$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+2}1.3.5.7\ldots(2n-1)$ $=(-1)^{n+2}(2n-1)!!$

Y ahora podemos escribir la serie de Maclaurin para $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ de la siguiente manera

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots=1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x^3+\cdots$$

O bien, ponemos

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\{2.4.6.8\ldots 2n\}\,x^n$$

Donde

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\{2.4.6.8\ldots 2n\}\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}(2n)!!\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\{2^n n!\}\,x^n$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2}\{2^n n!\}\, x^n \; *** \; (1)$$

Para encontrar el radio de convergencia de la serie (1), sea $a_n = (-1)^{n+2}\{2^n n!\}x^n$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+3}\{2^{n+1}(n+1)!\}x^{n+1}}{(-1)^{n+2}\{2^n n!\}x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}n!\,(n+1)}{2^n n!}\right)|-1||x| = \lim_{n\to\infty}\{2(n+1)\}|x| = \infty$$

Como $\lim_{n\to\infty}\{2(n+1)\} = \infty$ entonces $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\{2(n+1)\}} = 0$ y de acuerdo con el criterio del cociente tenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\{2^n n!\}\, x^n$ sólo converge cuando $x = 0$.

Forme la serie de Taylor de $f(x)$ en el valor dado de a. Supón que f tiene un desarrollo en serie de potencias. [No demuestres que $R_n(x) \to 0$].

1.- $f(x) = 1 + x + x^2$, $a = 2$.

SOLUCION. Ordenamos los cálculos para $n = 0,1,2,\ldots$

$f(x) = 1 + x + x^2$	$f(2) = 7$
$f'(x) = 1 + 2x$	$f'(2) = 5$
$f''(x) = 2$	$f''(2) = 2$
$f'''(x) = 0$	$f'''(2) = 0$
$f^{(4)}(x) = 0$	$f^{(4)}(2) = 0$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = 0;\ n > 2$	$f^{(n)}(0) = 0; n > 2$

Por lo tanto podemos escribir la serie de Taylor para $f(x) = 1 + x + x^2$ de la siguiente manera

$$1 + x + x^2 = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-2)^3 + \cdots$$

$$= 7 + 5(x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1.$$

2.- $f(x) = \ln(x+1)$, $a = 2$.

SOLUCION. Para $n = 1,2, \ldots$ se tiene

$f(x) = \ln(x+1)$	$f(2) = \ln(3)$
$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$	$f'(2) = \dfrac{1}{3}$
$f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$	$f''(2) = -\dfrac{1}{3^2}$
$f'''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$	$f'''(2) = \dfrac{2}{3^3}$
$f^{(4)}(x) = -\dfrac{2.3}{(x+1)^4}$	$f^{(4)}(2) = -\dfrac{2.3}{3^4}$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$	$f^{(n)}(2) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{3^n}$

Por lo tanto podemos escribir la serie de Taylor para $f(x) = \ln(x+1)$ de la siguiente manera

$$\ln(x+1) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-2)^3 + \cdots$$

$$= \ln 3 + \tfrac{1}{3}(x-2) - \tfrac{1}{(3)^2 2!}(x-2)^2 + \tfrac{2}{(3)^3 3!}(x-2)^3 - \cdots$$

O bien

$$= \ln(3) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{3^n n!}(x-2)^n = \ln(3) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n n}(x-2)^n.$$

$$\int \frac{\ln(1-x)}{x}dx$$

SOLUCION. Utilizando el hecho de que

$$\frac{1}{x}\ln(1-x) = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$$

Se obtiene lo siguiente

$$\int \frac{\ln(1-x)}{x}dx = -\int \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\int \frac{x^{n-1}}{n}dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

4.7.2 CONVERGENCIA DE LA SERIE DE TAYLOR

3.- Forma la serie de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para el valor de $a = 2$, y demuestra que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor mostrando que $R_n(x) \to 0$.

SOLUCIÓN. Se verifica fácilmente que la serie de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para el valor de $a = 2$ es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n; \ |x-2| < 1.$$

Y como

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Donde $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n-ésimo de f en $a = 2$. Entonces,

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} (x-2)^k \right\}; |x-2| < 1.$$

Por lo tanto

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \{-1 + (x-2) - (x-2)^2 + \cdots + (-1)^{n+1}(x-2)^n\}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \left\{ \frac{1 + (-1)^n (x-2)^{n+1}}{1-x} \right\}.$$

Y como $|x-2| < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{1-x} - \left[\frac{1 + (-1)^n (x-2)^{n+1}}{1-x} \right] \right\} = \frac{1}{1-x} - \left\{ \frac{1}{1-x} \right\} = 0.$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n.$$

Es la serie de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para$|x-2| < 1$.

REFERENCIAS

[1] T. M. Apostol. Calculus, Volumen 1 Ed. Reverté, México 1976, Segunda Edición. ISBN-84-291-5002-1.

[2] Leithold Louis. El Cálculo, Ed. Oxford, México, 1999, Séptima edición, 1360 páginas, ISBN 970-613-182-5.

[3] Stewart James. Cálculo. Trascendentes Tempranas, Grupo Editorial Iberoamerica, México 2008, Sexta Edición, 1138 páginas, ISBN: 0-495-01166-5.

[4] Swokowski Earl W. Cálculo con Geometría Analítica Grupo Editorial Iberoamerica, México 1989, Segunda Edición, ISBN: 9687270430.

[5] Zill Dennis G, Warren S. Wright. Cálculo. Trascendentes Tempranas. Editorial McGraw Hill/Interamericana Editores S.A. de C.V. Cuarta Edición 2011, ISBN 13: 978-607-15-0502-6.