INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

Apuntes de Cálculo Aplicado

Profesora: Elena Fabiola Ruiz Ledesma

Abril 2018

Tabla de contenido

i Introducción

La formación de ingenieros demanda un aprendizaje considerable de las matemáticas que contribuya a resolver problemas de orden técnico y tecnológico, pero, sobre todo, práctico. Las matemáticas que necesita un ingeniero deben proporcionar herramientas e instrumentos capaces de lograr la optimización en el uso de los recursos que la humanidad posee y requiere para su desarrollo [1].

El Cálculo otorga a los ingenieros los conocimientos y saberes necesarios que los puedan llevar a la resolución y modelado de problemas prácticos que incluyan funciones matemáticas con variable real. La forma en que es abordada la unidad de aprendizaje de Cálculo a nivel universitario debe contribuir a que el estudiante tenga un aprendizaje reflexivo y que sea crítico.

En los últimos años las escuelas de nivel superior han orientado su formación académica a fin de que sus egresados tengan un nivel de desarrollo rentable para las empresas, desafortunadamente los estudiantes ingresan con un nivel en Cálculo, bastante bajo, el cual, no permite el completo desarrollo de sus capacidades analíticas en las distintas materias que lo requieren.

Entre los problemas de aprendizaje del Cálculo que se han detectado en los estudiantes de nivel medio y superior, está la falta de significado y sentido [2] que tienen de los conceptos involucrados (función, límite, derivada e integral). Algunos autores de la literatura de matemática educativa lo atribuyen a que el estudio del Cálculo se restringe a una manipulación algebraica dejando a un lado las múltiples representaciones que hay [2, 3-7]. El punto de vista de algunos investigadores [5], es que las tareas de conversión promoverían un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización. En lo general, las tareas de conectar las diferentes representaciones de un concepto ayudan a su comprensión. En las referencias [2,3-8], se proporcionan ejemplos claros de experimentación educativa en donde la visualización es un elemento primordial para el aprendizaje del Cálculo.

Esta problemática, de la falta de otorgamiento de significado y sentido a los conceptos involucrados en el Cálculo, también se refleja en los estudiantes de la ESCOM, lo que influye en que los estudiantes no logran enfrentar con éxito las situaciones problemáticas que se les pide resolver en la unidad de aprendizaje de Cálculo Aplicado, trayendo como consecuencia:

- Bajo aprovechamiento en la materia.
- Alto índice de reprobación.
- Retraso en el aprendizaje de otras materias cuya base es Cálculo.
- Falta de interés en aprender otros métodos de estudio
- Deserción de los estudiantes por no poder acreditar las materias básicas.

Con la finalidad de apoyar al docente y al estudiante, se han desarrollado los apuntes de la Unidad de Aprendizaje de Cálculo Aplicado, empleando ejercicios rutinarios y problemas en contexto y mostrando paso a paso los procesos de solución.

ii Organización de los apuntes

Los apuntes se han organizado de la siguiente forma:

Se abordan los temas del programa de estudio en los cuales se dividen en 4 unidades temáticas.

La primera unidad se denomina Aplicaciones de la derivada y se inicia con razones de cambio relacionadas, se continúa con aplicaciones de la diferencial de una función, para determinar los errores en mediciones. El tercer tema es la determinación de puntos críticos, como los intervalos de crecimiento y concavidad de una función, empleando los criterios de la primera y segunda derivada. Se termina la primera unidad temática con la resolución de problemas de optimización.

La segunda unidad se denomina Aplicaciones del Cálculo Integral, de tal forma que se inicia con la determinación del área entre curvas, para pasar a la obtención de volúmenes de sólidos de revolución, mediante diferentes técnicas. Se concluye esta segunda unidad con el tema de longitud de arco.

La forma en cómo se presenta el contenido de los apuntes se describe enseguida:

Primeramente, se muestra una parte teórica de cada tema, seguido se presentan ejemplos tanto de ejercicios como de problemas en contexto, mostrando paso a paso el proceso de solución.

Hay una segunda sección que se titula "Ejercicios como apoyo en la clase", en la cual se presentan más ejercicios y problemas resueltos paso a paso, para que el profesor que imparta la materia tenga una variedad de problemas que abordar en clase.

En la tercera sección se tienen ejercicios y problemas para que sean resueltos por los estudiantes y en la última sección se presenta un examen de opción múltiple de cada unidad temática.

UNIDAD 1

APLICACIONES DE LA DERIVADA

1.1 Razones de cambio relacionadas

Al definir la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto fijo x_0, se explicitó en el curso previo de Cálculo, que:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Donde $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0),\ y\ \Delta x = x - x_0 = h,$ son los incrementos de las variables y y x, respectivamente.

Refiriéndonos a estos incrementos podemos decir que:

- El incremento $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ muestra el cambio que tiene la variable y.
- El incremento $\Delta x = x - x_0 = h$ muestra el cambio que tiene la variable x.
  De esto se desprende la definición.

Definición 1.1.1 El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, es una razón de cambio que muestra la razón entre el cambio que tiene la variable y y el cambio que tiene la variable x.

Es decir, es una razón que compara el cambio de la variable y con respecto al cambio de la variable x. O en otras palabras, es una razón que mide el cambio promedio de la variable y, a lo largo del intervalo limitado por $x_0\ y\ x_0 + \Delta x$.

Ahora bien, al escribir $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos estamos refiriendo a la razón de cambio promedio de la variable y cuando se consideran cambios cada vez más pequeños en la variable x.Podemos decir que con este límite se busca una razón de cambio instantánea de la variable y con respecto a la variable x. Es decir:

Definición 1.1.2 Cuando hacemos que la longitud ($|\Delta x|$) del intervalo limitado por $x_0\ y\ x_0 + \Delta x$ tienda a cero, "la razón de cambio promedio de y" se convierte en "la razón de cambio instantánea de y", con respecto a x.

En el caso particular en que la variable independiente es el tiempo t, es usual referirse a la derivada como una velocidad de cambio, en lugar de decir razón de cambio instantánea con respecto a t. Por ejemplo:

- Si $x = \emptyset(t)$ es la posición de un móvil en el instante de tiempo t, entonces $\frac{dx}{dy} = \emptyset'(t)$ es la velocidad de cambio de la posición $x = \emptyset(t)$ en el instante de tiempo t, que es la velocidad instantánea del móvil.
-
- Si $v = g(t)$ es la velocidad de un móvil en el instante de tiempo t, entonces $\frac{dv}{dt} = g'(t)$ es la velocidad de cambio de la velocidad $v = g(t)$ en el instante de tiempo t, que es la aceleración instantánea del móvil.

Supongamos ahora que, en el contexto de un problema, se tiene una función de la que queremos medir y obtener su razón de cambio (su derivada). Es muy probable que dicha función se encuentre relacionada con otras funciones cuyas derivadas (razones de cambio) se conozcan. La estrategia en este caso consiste en determinar una relación matemática en donde se relacionen las funciones que aparezcan en el contexto del problema.

Posteriormente se deriva la expresión matemática mencionada y se obtiene una relación de funciones y razones de cambio (las que se conocen con las que no se conocen).

Por último se despeja la razón de cambio deseada que estará en términos de las otras razones de cambio.

Se dice entonces que se tiene un problema de razones de cambio relacionadas.

En este tipo de problemas es de vital importancia tener muy claro ¿Qué es lo que se pide en el problema? Así como, ¿Qué es lo que se sabe en el problema? Teniendo claro lo que se pide y lo que se sabe, procedemos a matematizar el problema.

Ejemplo 1.1.1 Rapidez de crecimiento del área de un círculo

Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3m, este aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm/s. ¿A qué rapidez (velocidad) aumenta el área del círculo formado por dicha onda?

Proceso de solución

Elaborar un dibujo colocando los datos del problema (figura 1.1).

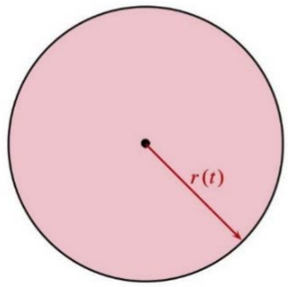


Figura 1.1 Circulo de radio 3m

Datos

El área del círculo es $A = \pi r^2$.

La razón de cambio de A con respecto al tiempo t se obtiene derivando ambos miembros con respecto al tiempo: $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\pi r^2(t)\right) = 2\pi\, r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right)$

En el caso particular en que $r(t) = 3\ m$ y $\frac{dr}{dt} = 0.5\frac{m}{s}$:

Operaciones

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\, r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right) = 2\pi\ (3\ m)\left(0.5\frac{m}{s}\right) = 3\pi\frac{m^2}{s} \approx 9.4248\ \frac{m^2}{s}$$

Resultado

En el instante en que el radio es de 3m, ¿éste tiene un cambio de 0.5 m/s y el área tiene un cambio de 3π m^2/s

Ejemplo 1.1.2 Velocidad con la que se separan dos barcos

Dos barcos salen simultáneamente de un puerto; uno viaja hacia el sur a una velocidad de 30 km/h y el otro hacia el este a una velocidad de 40 km/h. Después de 2h ¿Cuál es la velocidad de separación de los 2 barcos?

Proceso de solución

Se elaboran gráficos colocando los datos en ellos. Como se aprecia en la figura 1.2.

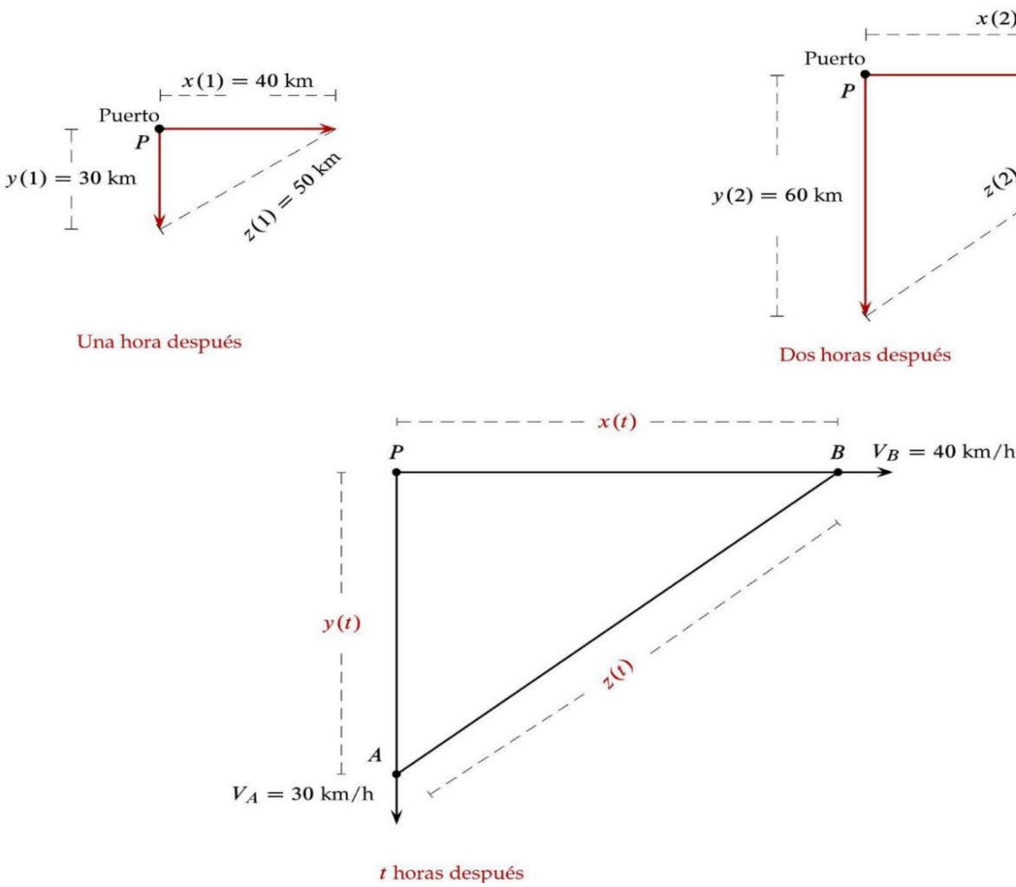


Figura 1.2 Representación gráfica de los barcos.

Datos

Si $x(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco B que se desplaza hacia el este, entonces:

$$x(t) = v_B \cdot t = 40\frac{km}{h} \cdot t(h) = 40t\ km$$

Y si $y(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco A que se desplaza hacia el sur, entonces:

$$y(t) = v_A \cdot t = 30\frac{km}{h} \cdot t(h) = 30t\ km$$

Donde $x(t)$ y $z(t)$ dependen del tiempo t

Operaciones

Derivando implícitamente con respecto a t se obtiene:

$$2z(t)\left(\frac{dz}{dt}\right) = 2x(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

De donde, para cualquier instante t, mientras x>0:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z(t)}{x(t)}\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

En el instante t_o en $x(t_o) = 4\,m$ se tiene que

$$z(t_o)^2 = x(t_o)^2 + 3^3 = 4^2 + 9 = 25 \Rightarrow z(to) = 5\,m$$

Y debido a que $\frac{dz}{dt} = -0.8\frac{m}{s}$ obtenemos que, en ese instante t_o:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z(t_o)}{x(t_o)}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{5}{4}\cdot(-0.8) = -1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1\frac{m}{s}$$

Respuesta

El signo negativo del resultado indica que la distancia x de la lancha al muelle disminuye o decrece a razón de 1 m/s.

Ejemplo 1.1.3 La escalera

Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared en una proporción de 1 pie/s. ¿Qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo por la pared cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

Proceso de solución

Primero dibuje un esquema y ponga los datos como se muestra en la figura 1.3. Sea x pies la distancia desde la parte inferior de la escalera al muro y y pies la distancia desde la parte superior de la escalera al piso. Observe que x y y son funciones del tiempo t (tiempo que se mide en segundos).

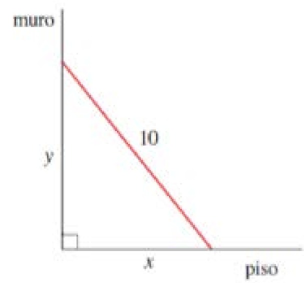


Figura 1.3 Datos en la representación icónica

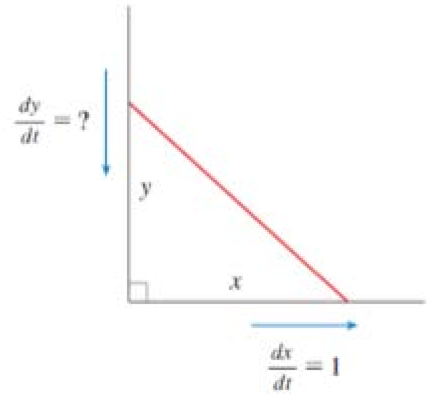


Figura 1.4 Segunda representación icónica del problema

Fórmulas y operaciones

Se sabe que $\frac{dx}{dt} = 1\frac{pie}{s}$ y se pide determinar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 6$ pies (véase figura 1.4).

En este problema, la relación entre x y y la define el teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = 100$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros aplicando la regla de la cadena

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Y al resolver esta ecuación para determinar la relación deseada

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da $y = 8$ y al sustituir estos valores y $\frac{dx}{dt} = 1$, llega a

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4}\frac{pies}{s}$$

El hecho de que $\frac{dy}{dt}$ sea negativa quiere decir que la distancia desde la parte superior de la escalera al suelo *decrece* una proporción de $\frac{3}{4}\frac{pies}{s}$.

Respuesta

La parte superior de la escalera se resbala hacia debajo de la pared una proporción de $\frac{3}{4}\frac{pies}{s}$.

Ejemplo 1.1.4. Depósito de agua

Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido, el radio de la base es de 2 m, y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a una razón de 2 m3/min, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m. de profundidad.

Proceso de solución

Primero elabore un diagrama del cono y anote la información como en la figura 1.5. Sean V, r y h el volumen del agua, el radio de la superficie circular y la altura en el tiempo t, donde t se mide en minutos.

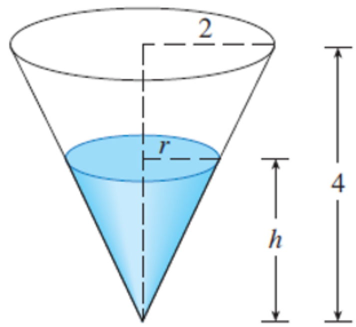


Figura 1.5 Representación icónica del problema

Datos

Se sabe que $\frac{dV}{dt} = 2\frac{m^3}{min}$ y se pide determinar $\frac{dh}{dt}$ cuando h es $3\ m$. Las cantidades V y h se relacionan mediante la ecuación

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Operaciones y relaciones

Pero es muy útil expresar V sólo en función de h. Con objeto de eliminar r, recurra a los trángulos semejantes en la figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

Y la expresión para V se vuelve

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ahora puede derivar con respecto a t cada miembro:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

De modo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $h = 3\ m$ y $\frac{dV}{dt} = 2\frac{m^3}{min}$ obtiene

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2} * 2 = \frac{8}{9\pi}$$

El nivel del agua sube a razón de $\frac{8}{9\pi} \approx 0.28\frac{m}{min}$.

Respuesta

La rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m. de profundidad es de 0.2829 $\boldsymbol{\frac{m^3}{m_i n}}$

Ejemplo 1.1.5 Dos automóviles

El automóvil A se dirije hacia el oeste a $50\frac{millas}{h}$ y el vehículo B viaja hacia el norte a $60\frac{millas}{h}$. Ambos se dirigen hacia la intersección de los dos caminos. ¿Con qué rapidez se aproximan los vehículo entre sí cuando el autmóvil A está a 0.3 $millas$ y el vehículo B está a 0.4 $millas$ de la intersección?

Propuesta de solución

Datos

Dibuje la figura 1.6 donde C es la intersección de los caminos. En un tiempo dado t, sea x la distancia entre el automóvil A y C, sea y la distancia desde el automóvil B a C. y sea z la distancia entre los vehículos, donde x, y y z se miden en millas.

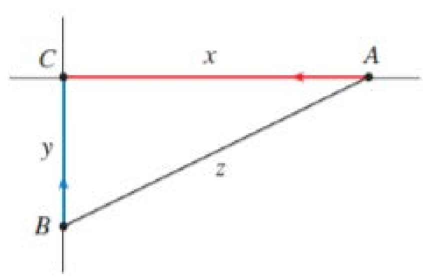


Figura 1.6 Representación icónica del problema

Fórmulas y relaciones

Se tiene que $\frac{dx}{dt} = -50\frac{millas}{h}$ y $\frac{dy}{dt} = -60\frac{millas}{h}$. Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes. Se pide calcular $\frac{dz}{dt}$. La ecuación que relaciona x, y y z la proporciona el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados con respecto a t obtiene

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Cuando $x = 0.3\,millas$ y $y = 0.4\,millas$, el teorema de Pitágoras da $z = 0.5\,millas$, de modo que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}[0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78\frac{millas}{h}$$

Respuesta

Los vehículos se aproximan entre sí a razón de $78\frac{millas}{h}$.

1.2 Diferencial de una función

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de diferenciales. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la diferencial dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La diferencial dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación:

$$dy = f'(x)dx$$

Definición 1.2.1 La diferencial de una función es igual al producto de la derivada de esa función por la diferencial de la variable independiente.

Sea $y = f(x)$

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Sustituyendo Δx por dx:

$$dy = f'(x)dx$$

Al incremento Δx, se le llama diferencial de la variable independiente y se denota como dx.

A la función *f'(x) dx*, se le llama diferencial de la variable dependiente *y*, y se denota como *dy*.

Δy representa el incremento de la función y se escribe:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Y como Δy se aproxima a la diferencial de y se tiene:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \longrightarrow f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)dx$$

1.2.1 Aplicaciones de la diferencial y determinación de errores

Al incremento de Δx se le llama *diferencial de la variable independiente* y se denota como:

$$\Delta x = dx$$

A la función $f'(x)\Delta x$ se le llama diferencial de la variable dependiente y, y se denota por

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Se observa que Δy es diferente de la diferencial de *y*, pero Δy se aproxima a la dy.

$$Sea \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$$

$pero\ como\ \Delta y \approx dy$

$$\rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

$$dy = f'(x)\Delta x$$

$$\therefore f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor f (a) de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f. Por tanto, recurrimos a los valores calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en (a, f(a)). En otras palabras, utilizamos la recta tangente en (a, f (a)) como una aproximación a la curva y = f (x) cuando x está cerca de a. Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Definición 1.2.1.1 La aproximación $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ se conoce con el nombre de aproximación lineal o aproximación de la recta tangente de f en a. A la función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir, $L(x) = f(a) + f'(a)(x + a)$, se llama linealización de f en a.

Ejemplo 1.2.1.1 ¿Para cuáles valores de x la aproximación lineal es exacta con una diferencia menor que 0.5? ¿Qué puede decir de una exactitud con una diferencia menor que 0.1?

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

Solución: Una exactitud con una diferencia menor que 0.5 significa que las funciones deben diferir en menos de 0.5:

$$\left|\sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4}\right)\right| < 0.5$$

De modo equivalente podría escribir

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

Con esto se expresa que la aproximación lineal debe encontrarse entre las curvas que se obtienen al desplazar la curva $y = \sqrt{x+3}$ hacia arriba y hacia abajo en una cantidad de 0.5. En la figura 1.7 semuestra la recta tangente $y = \frac{(7+x)}{4}$ que interseca la curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ en P y en Q. Al hacer un acercamiento y usar el cursor, estima que la coordenada x de P se aproxima a -2.66 y la coordenada x de Q es más o menos 8.66. Por eso, con base en la gráfica, la aproximación

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5, cuando $-2.6 < x < 8.6$. (Se ha redondeado para quedar dentro del margen de seguridad.)

De manera análoga, en la figura 1.8 la aproximación es exacta con una diferencia menor que 0.1 cuando $-1.1 < x < 3.9$.

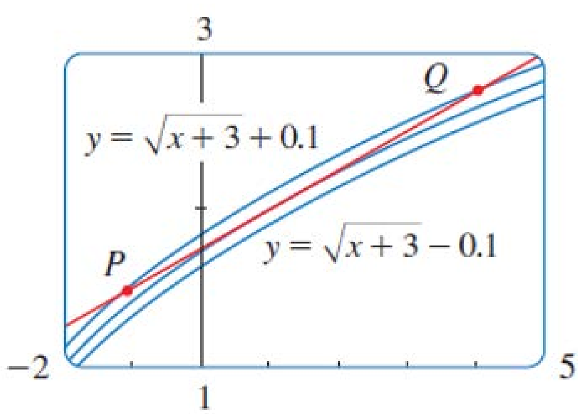


Figura 1.7 Representación de la aproximación

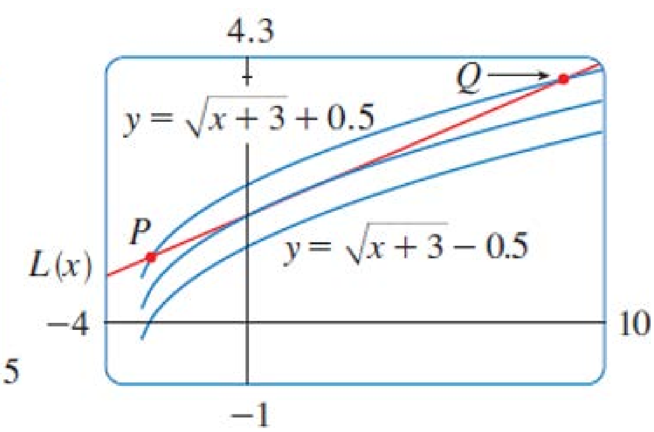


Figura 1.8 Representación de la aproximación

Si x denota el valor medido de una variable, $x + \Delta x$ representa el valor real, entonces Δx denota el error de medición. De esta manera, si el valor medido de x se utiliza en el cálculo de alguna otra magnitud $f(x)$, entonces la diferencia que hay entre $f(x + \Delta x)$ y $f(x)$ se le conoce como error propagado.

$$EP = valor\ real - valor\ aproximado$$

Sin embargo, en la práctica empleamos el error relativo:

$ER = \frac{EP}{Valor\ real}$ $\qquad\qquad\qquad$ $ER = \frac{dy}{y}$

Ejemplo 1.2.1.2

En los incisos a, b y c, utilice el concepto de diferencial de una función para aproximar los valores de las operaciones solicitadas en cada inciso:

$a)\ \sqrt{25.4}$

$y = f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$Si\ x = 25\ ;\ \ \Delta x = 0.4$

$\sqrt{25.4} = \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$\sqrt{25 + 0.4} \approx 5 + \frac{1}{2\sqrt{25}}(0.4) \approx 5 + \frac{1}{10}\left(\frac{4}{10}\right) \approx 5 + \frac{4}{100} = \mathbf{5.04}$$

$b)\ \ (2.001)^5$

$f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4$

$Si\ x = 2\ ;\ \ \Delta x = 0.001$

$(2.001)^5 = f(x + \Delta x) = x^5 + 5x^4dx$

$= 32 + 0.08$

$= \mathbf{32.08}$

$c)\ \ (8.06)^{\frac{2}{3}}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

$Si\ x = 8\ ;\ \ \Delta x = 0.6$

$f(x + \Delta x) = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x3^{-\frac{1}{3}}dx = 4 + 0.2\ = \mathbf{4.2}$

Ejemplos de problemas en contexto

Ejemplo 1.2.1.3 El cubo

La medida efectuada del lado de un cubo es de 30 cm con un error posible de ±0.02 cm.

a) ¿Cuál es el error máximo posible aproximado del volumen del cubo?

Datos	Uso de fórmula y operaciones
	$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)dx$
$f(x) = x^3$	$(30)^3 + 3(30)^2(0.02) = 27054$
$f'(x) = 3x^2$	$(30)^3 + 3(30)^2(-0.02) = 26946$
	$EP = valor\ real - valor\ aproximado$
$x = 30$	$\mathrm{EP} = 27000 - 27054 =\ \pm 54$
$\Delta x = \pm 0.02$	

Respuesta

a) El error máximo en la medición del volumen es de $\pm 54\ cm^3$

b) ¿Cuál es el error relativo?

Al emplear la fórmula y sustituir los valores se obtiene:

$ER = \frac{EP}{Valor\ real}$ $\qquad ER = \frac{3x^2dx}{x^3} = \frac{3dx}{x} = \frac{3(0.02)}{30} = 0.002$

El error relativo es de 0.002

c) ¿Cuál es el porcentaje de error?

$$\mathrm{Ep} = (0.002)(100) = 0.2\%$$

El error porcentual es del 2%

Ejemplo 1.2.1.4 La esfera

Se midió el radio de una esfera y se encontró que es de 21 cm, con un posible error en la medida de 0.05 cm.

a) ¿Cuál es el error máximo en el volumen, al usar este valor del radio?

Datos | Fórmula y operaciones

$r = 21\ cm$ $\quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad V = \frac{4}{3}\pi(21)^3 = 38792.38$

$\Delta r = 0.05 \quad \frac{4}{3}\pi(21)^3 + 4\pi(21)^2(0.05) = 39069.47$

$dv = 4\pi r^2 dr \quad EP = 39069.47 - 38792.38 = 207.09$

Respuesta. El error máximo en el volumen de la esfera es de 207 cm^3

b) ¿Cuál es el error relativo?

Utilizando la fórmula y sustituyendo los valores se tiene:

$ER = \frac{EP}{Valor\ real} \qquad ER = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3dr}{r} = \frac{3(0.05)}{21} = 0.007$

Respuesta. El error relativo es de 0.007

c) ¿Cuál es el error porcentual?

$$\mathrm{Ep} = (0.007)(100) = 0.7\%$$

Respuesta. El porcentaje de error es 0.7%

Ejemplo 1.2.5 Tapa circular

El radio de la tapa circular de un pozo de alcantarilla es de 40 cm, con un error en la medición de 0.15 cm.

a) Utilizando diferenciales, estime el error en el cálculo del área de la tapa.

$r = 40\ cm \qquad A = \pi r^2 \qquad dA = 2\pi r dr$

$dr = 0.15\ cm \qquad dA = 2\pi(40)(0.15) = 37.69 = 12\pi$

b) Calcule el error relativo y porcentual.

$ER = \frac{EP}{Valor\ real} \qquad ER = \frac{12\pi}{\pi r^2} = \frac{12\pi}{r(40)^2} = 0.0075$

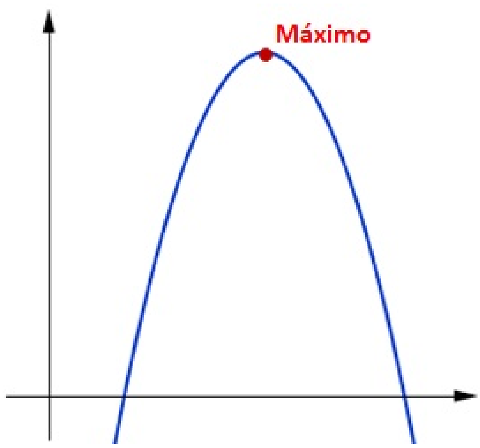
$$\text{Ep} = (0.0075)(100) = 0.75\%$$

1.3. Aplicación de Máximos y mínimos

1.3.1.- Extremos de una función

Definición 1.3.1.1 Los **máximos** y **mínimos** en una función *f* son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) que toma la función, ya sea en una región (extremos relativos) o en todo su dominio (extremos absolutos).

Los máximos y mínimos también se llaman **extremos de la función**.



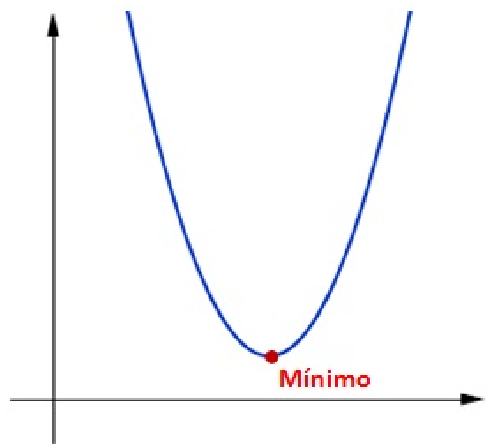


Figura 1.4 Ubicación en la gráfica del punto máximo **Figura 1.5** Ubicación del punto mínimo

Definición 1.3.1.2 Los **extremos absolutos** son los valores de una función *f* más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) de todo el dominio.

El máximo absoluto de la función f es el valor más grande en todo el dominio. El **mínimo absoluto** de la función *f* es el valor más pequeño en todo el dominio.

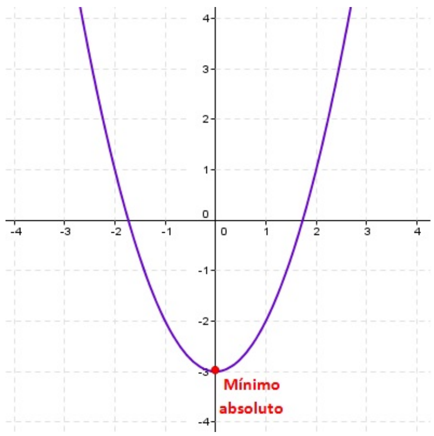


Figura 1.6 Gráfico

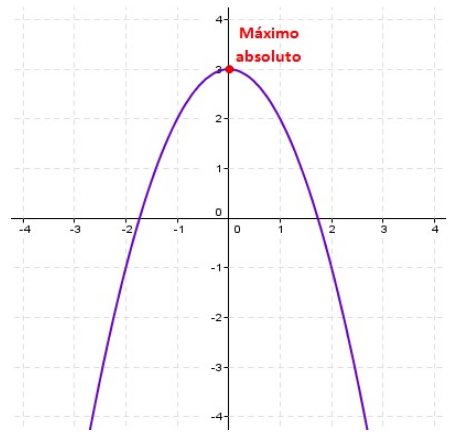


Figura 1.7 Gráfico

Definición 1.3.1.3. En términos de sus derivadas, sean *f* y *f* ' derivables en *M*. Entonces *M* es máximo relativo de *f* si: $f'(M)=0$ y $f''(M)<0$

- La función *f* tiene en *M* un **máximo relativo** si *f*(*M*) es mayor que sus valores próximos a izquierda y derecha. También se puede decir que *M* es un **máximo relativo** en su entorno si a la izquierda la función es creciente y a la derecha decreciente.

En términos de sus derivadas, sean f y f ' derivables en m. Entonces m es mínimo relativo de f si: $f'(m)=0$ y $f''(m)>0$

- La función *f* tiene en *m* un **mínimo relativo** si *f*(*m*) es menor que sus valores próximos a izquierda y derecha. También se puede decir que *m* es un **mínimo relativo** en su entorno si a la izquierda la función es decreciente y a la derecha creciente.

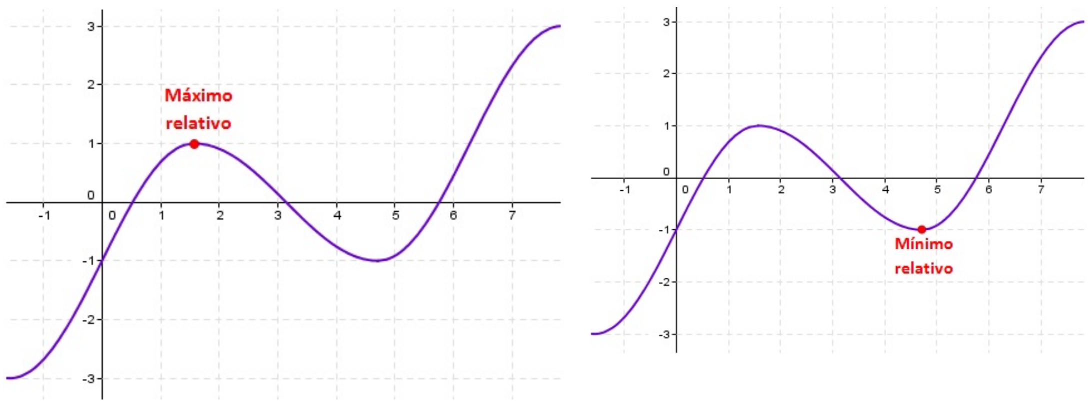


Figura 1.8 Representación en las gráficas de un mínimo relativo y un máximo relativo

1.3.2. Criterio de la primera derivada

Definición 1.3.2.1 Se llama criterio de la primera derivada al método o teorema utilizado frecuentemente en el cálculo matemático para determinar los mínimos y máximos relativos que pueden existir en una función mediante el uso de la primera derivada o derivada principal. Donde se observa el cambio de signo, en un intervalo abierto señalado que contiene al punto crítico c.

Teorema 1.3.2.1 Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ que es derivable en todo punto del intervalo abierto $]a, b[$

Sea c en $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$ 0 $f'(c)$ no existe

i. Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$, y positiva para todo $x > c$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo de$f(x)$
ii. Si $f'(x)$ es negativa para toda $x < c$, y positiva para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de $f(x)$
iii. Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$, y positiva para toda $x > c$; o si $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$ y a su vez para todo $x > c$, entonces $f(c)$ no es un valor máximo ni mínimo relativo de $f(x)$

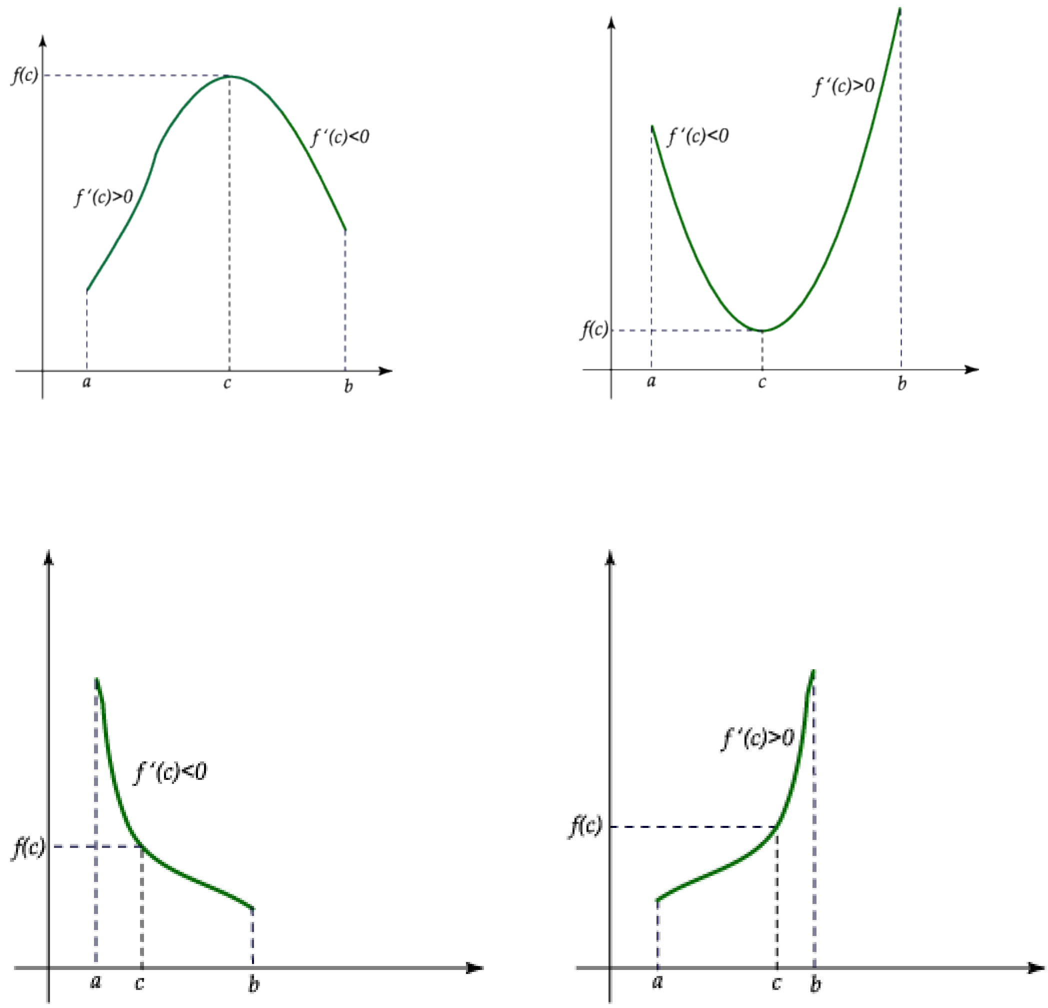


Figura 1.9 Representación gráfica del teorema .3.2.1

1.3.3. Criterio de la segunda derivada

El criterio o prueba de la segunda derivada es un teorema del cálculo matemático en el que se utiliza la segunda derivada para efectuar una prueba simple correspondiente a los máximos y mínimos relativos. Se basa en el hecho de que si la gráfica de una función f es cóncava hacia arriba debe de tener un mínimo relativo. De manera similar, si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo debe de tener un máximo relativo. La segunda derivada se escribe como la doble prima de f.

Teorema 1.3.3.1 Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a c.

i. Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo (Cóncava hacia arriba).
ii. Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo. (Cóncava hacia abajo).
iii. Si $f''(c) = 0$, este criterio no decide y ha de recurrirse al criterio de la primera derivada.

Definición 1.3.3.1 La función *f(x)* es cóncava hacia arriba cuando las rectas tangentes a dicha función están por debajo de la curva. La función *f(x)* es cóncava hacia abajo cuando las rectas tangentes a dicha función están por arriba de la curva.

i. Si *f''(x)>0* para todo *x* en un intervalo *(a,b)*, entonces *f(x)* es cóncava hacia arriaba en tal intervalo.
ii. Si *f''(x)<0* para todo *x* en un intervalo *(a,b)*, entonces *f(x)* es cóncava hacia abajo en tal intervalo.

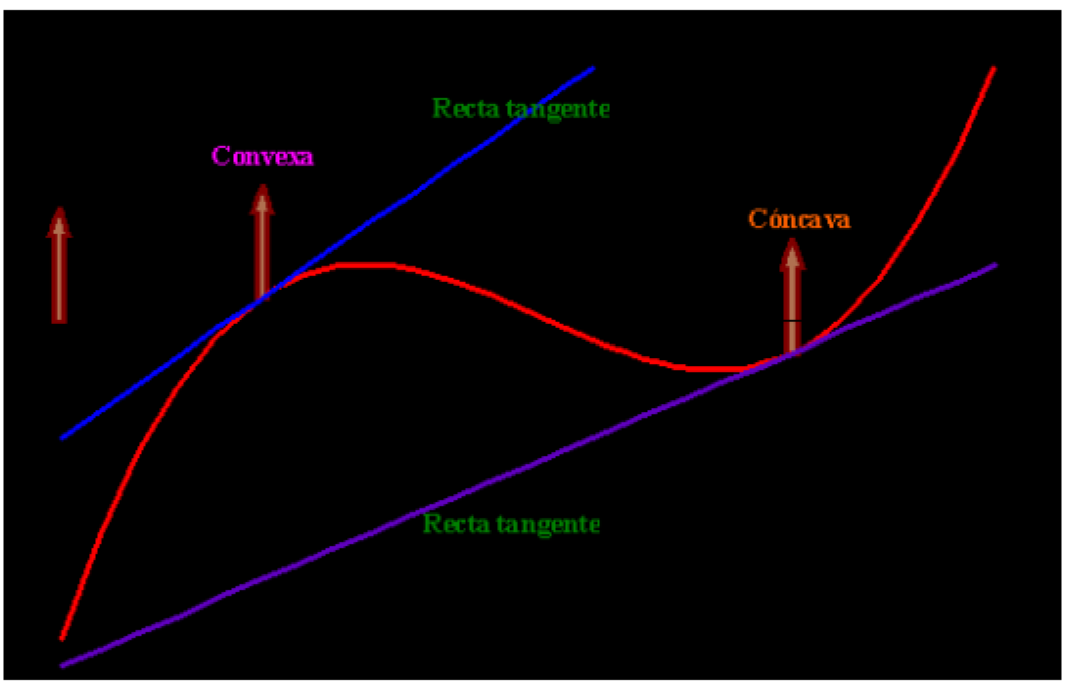


Figura 1.9. Representación de la concavidad de una función

Ejemplo 1.3.3.1 Función algebraica

Dada f(x) = $2x^3 + 3x^2 - 36x$ determine:

a) Los puntos máximos, mínimos y puntos de inflexión
b) Los intervalos en los que la f es creciente, decreciente y concavidad.
c) Grafique f(x).

Proceso de solución

f(x) = $2x^3 + 3x^2 - 36x$

- Derivar f(x)
  f´(x) = $6x^2 + 6x - 36$
- Igualar a cero y resolver para x
  $6x^2 + 6x - 36 = 0$ => $x^2 + x - 6 = 0$ => (x + 3) (x – 2)=0 entonces:

- Dividir en intervalos la recta real y determinar si la derivada es positiva o negativa y si la función es positiva o negativa

Intervalos	(x + 3)	(x – 2)	f´(x)
(-∞,-3)	-	-	+
(-3,2)	+	-	-
(2,∞)	+	+	+

f (-3) = $2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3)$ =81
f (2) = $2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2)$ = -44

Respuesta

Máximo:(-3,81)
Mínimo:(2,-44)

f es decreciente en: (-3,2)
f es creciente en : (-∞,-3) U (2,∞)

Criterio de la segunda derivada

- Obtener la segunda derivada de f(x)
  f´(x) = $6x^2 + 6x - 36$
  f´´(x) = $12x + 6$
- Igualar a cero y resolver para x
  $12x + 6$ = 0
  x = -½
- Dividir en intervalos la recta real y determinar el signo de la segunda derivada

Intervalos	$12x + 6$	f´´(x)	Concavidad
(-∞,-1/2)	-	-	CAB
(-1/2, ∞)	+	+	CAR

Puntos de inflexión

f (-1/2) $= 2(-1/2)^3 + 3(-1/2)^2 - 36(-1/2)$ = 18.5 **(-1/2,18.5)**

Intervalos de concavidad

CAR:(-1/2, ∞)

CAB: (-∞,-1/2)

- Elaborar la gráfica de f(x). (Figura 1.10)
-

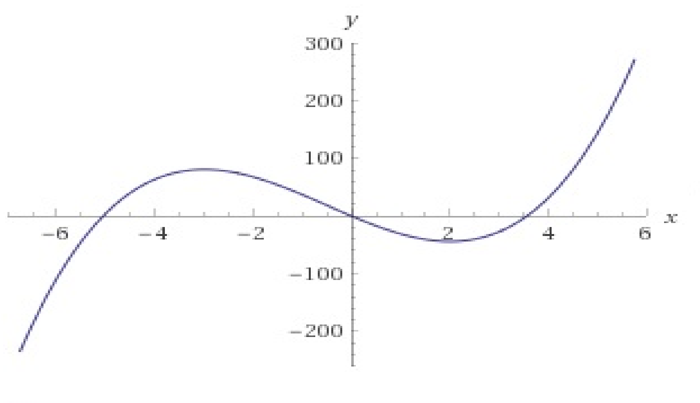


Figura 1.10 representación gráfica de f(x) = $2x^3 + 3x^2 - 36x$

Ejemplo 1.3.3.2 Función trigonométrica

Dada la función $g(x) = \text{Senx} + \text{Cosx}$ $0 \leq X \leq 2\pi$

a) Los puntos máximos, mínimos y puntos de inflexión
b) Los intervalos en los que la f es creciente, decreciente y concavidad.
c) Grafique f(x).

- Primera Derivada.

$g´(x) = \text{Cosx} - \text{Senx}$

$\text{Cosx} - \text{Senx} = 0$

$\left(\sqrt{1} - Sen^2x\right) - Senx = 0$

$(\sqrt{1-Sen^2x}).^2 = Sen^2x$

- Igualar a cero y resolver para x

  $1 - Sen^2x = Sen^2x$

  $1 = 2Sen^2x$

  $Sen^2x = ½$

  $Senx = \sqrt{½}$

  $X_1 = \pi/4 = 45°$

  $X_2 = 5\pi/4 = 135°$

Intervalos	g´(x)	g(x)
(-0, π/4)	+	Creciente
(π/4, 5π/4)	-	Decreciente
(5π/4,2π)	+	Creciente

- Determinar los intervalos y cuándo la derivada de la función es positiva y cuándo es negativa para establecer dónde la función es creciente y decreciente

  $g(\pi/4) = Cos(\pi/4) + Sen(\pi/4) = \sqrt{2}$

  $g(5\pi/4) = Cos(5\pi/4) + Sen(5\pi/4) = -\sqrt{2}$

  Máximo (π/4, √2)

  Mínimo (5π/4, -√2)

- Segunda derivada

  $g´´(x) = -Senx - Cosx$

- Igualar a cero y resolver para x

  $-Senx - Cosx = 0$

  $-Senx = Cosx$

  $X_1 = 3\pi/4 = 45°$

$X_2 = 7\pi/4 = 135°$

- Dividir en intervalos la recta real, y determinar cuándo la segunda derivada de la función es positiva y cuándo es negativa para establecer la concavidad.

Intervalos	g´(x)	g(x)
(-0, 3π/4)	-	CAB
(3π/4, 7π/4)	+	CAR
(7π/4,2π)	-	CAB

$g(\pi/4) = \mathrm{Cos}(3\pi/4) + \mathrm{Sen}(\pi/4) = 0$

$g(5\pi/4) = \mathrm{Cos}(7\pi/4) + \mathrm{Sen}(5\pi/4) = 0$

Respuesta

Puntos de inflexión (3π/4, 0) , (7π/4, 0)

- Elaborar la gráfica de f(x). (Figura 1.11)

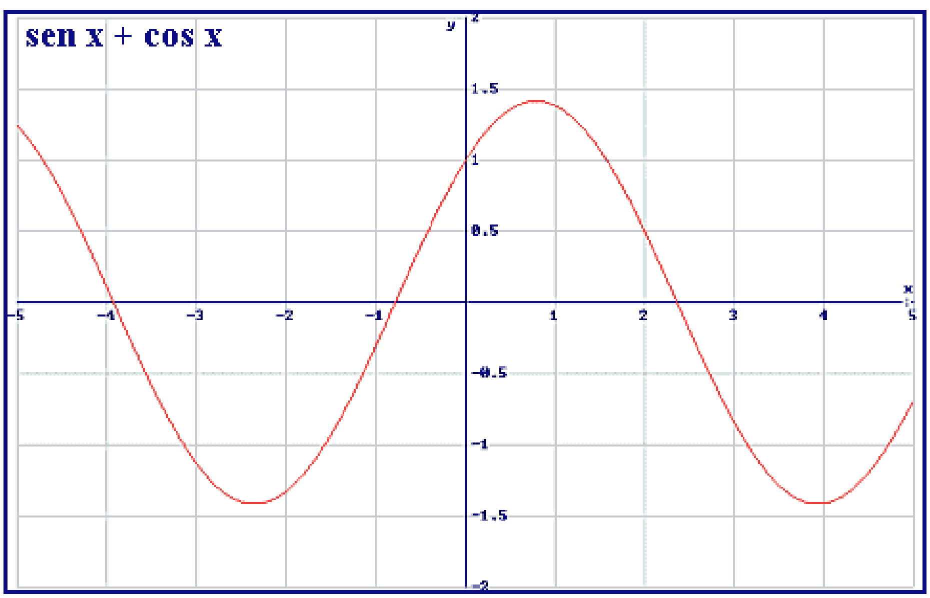


Figura 1.11 Representación gráfica de $g(x) = \mathrm{Senx} + \mathrm{Cosx} \quad 0 \leq X \leq 2\pi$

Ejemplo 1.3.3.3 función algebraica

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$$

- Su derivada es:

$$f'(x) = \frac{6x - 2}{2\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$$

- Igualamos a cero la función y resolver x para encontrar los máximos y mínimos

$$\frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} = 0$$

$$3x - 1 = 0$$

$x = \frac{1}{3}$ => Punto critico

Intervalo	3x-1	Concavidad de f(x)
(-∞, 1/3)	-	Decreciente
(1/3, ∞)	+	Creciente

- Calcular 2da derivada

$$f''(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 2x + 1} - (3x - 1) * \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}}{(\sqrt{3x^2 - 2x + 1})^2}$$

$$= \frac{3(3x^2 - 2x + 1) - (3x - 1)^2}{(3x^2 - 2x + 1)\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$$

$$= \frac{2}{(3x^2 - 2x + 1)^{3/2}}$$

$$= 2(3x^2 - 2x + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

- Igualamos a cero

$$2(3x^2 - 2x + 1)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$(3x^2 - 2x + 1) = 0$

Si x=1/3

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1} = 0.8164$$

Punto mínimo (1/3, 0.8164)

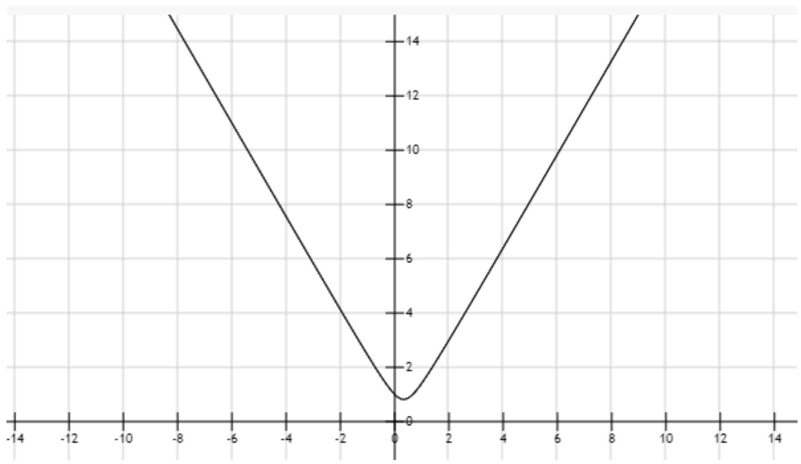


Figura 1.12. Representación gráfica de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$

1.4 Optimización

Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable. En otras palabras, se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable. Se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema. En ocasiones es preciso considerar las restricciones que se tengan en el problema, ya que éstas generan igualdades entre las variables que permiten la obtención de la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar.

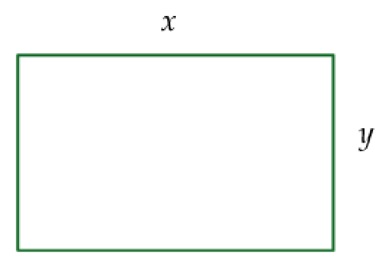
En la resolución de problemas en que se debe determinar el máximo o el mínimo de una cierta expresión, deben seguirse los siguientes pasos:

- Determinar la magnitud que debe hacerse máxima o mínima, y asignarle una letra.
- Hacer un dibujo cuando sea necesario.
- Asignar una letra a las cantidades mencionadas en el problema y escribir una ecuación en la que se establezca lo que se debe hacer máximo o mínimo.
- Establecer las condiciones auxiliares del problema y formar una ecuación (ecuación auxiliar)
- Expresar la cantidad que debe maximizarse o minimizarse en términos de una sola variable utilizando para ello la ecuación auxiliar. Determinar el dominio de esta función.
- Obtener la primera derivada de esta función para determinar los valores críticos.
- Comprobar, utilizando el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada, si los valores críticos son máximos o mínimos.
- Verificar que el valor obtenido cumple las condiciones dadas en el problema
- Responder a la pregunta establecida en el enunciado del problema.
- En algunos problemas hay que utilizar diversas figuras geométricas por lo que se requiere recordar distintas fórmulas sobre áreas y volúmenes:

Ejemplo 1.4.1 Área máxima de un rectángulo conocido su perímetro

Un rectángulo tiene 120 m. de perímetro. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo que dan el área máxima?

Proceso de solución



Se debe maximizar el área A de un rectángulo: $A = xy$

Designemos con "x", "y" las longitudes de los lados del rectángulo.

Luego. Como el perímetro del rectángulo es 120 m. entonces la ecuación auxiliar es: $2x + 2y = 120$ de donde $y = 60 - x$

Luego, $A(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$

Como $A'(x) = 60 - 2x$ y $A'(x) = 0 \leftrightarrow x = 30$

entonces $x = 30$ es un valor crítico.

Analicemos si este valor es máximo o mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada.

Como $A''(x) = -2x$ y, $A''(30) = -2(30) = -60 < 0$

Entonces $x = 30$ es un valor máximo. Si $y = 30$,

Por lo que un cuadrado de lado 30 es el rectángulo de mayor área y perímetro 120m.

Ejemplo 1.4.2 Juego de números

Determinar dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto tenga el mayor valor posible.

Solución:

Se debe de maximizar el producto P de dos números positivos. Sean estos números: x, y

Luego $P = xy$

Como la suma de esos números es 10, entonces $x + y = 10$ es la ecuación auxiliar, de donde $y = 10 - x$

Entonces:

$$P(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

Se debe de determinar el valor de x que hace máxima la función $P(x)$ Derivando: $P'(x) = 10 - 2x$

Valores críticos: $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x - 5$

En se tiene un valor crítico que se debe estudiar si es un valor mínimo o un valor máximo.

Como $P''(x) = -2$ entonces $P''(x) = -2 < 0$ por lo que en $x = 5$ se tiene un valor máximo.

Si $x = 5$ entonces $y = 10 - 5 = 5$. Luego, los números positivos cuyo producto es máximo y cuya suma es 10 son ambos iguales a 5.

Ejemplo 1.4.3. Problema de la construcción de una caja para obtener su máximo volumen

Se tiene una hoja que mide de ancho 22 cm y de largo 28 cm. Se desea construir una caja sin tapa. ¿Cuál es el volumen máximo que podemos obtener?

Datos

$v = A * h$

$v = l * a * h$

Fórmula y operaciones

$f(x) = v(x) = 4x^3 - 100x^2 + 616x$

$F'(x) = 12x^2 - 200x + 616$

$F'(x) = 12x^2 - 200x + 616 = 0$

$2(6x^2 - 100x + 308) = 0$

$4(3x^2 - 50x + 154) = 0$

$a = 3 \quad b = -50 \quad c = 154$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{50 \pm \sqrt{-50^2 - 4(3)(154)}}{2(3)}$

$x = \frac{50 \pm \sqrt{652}}{6}$

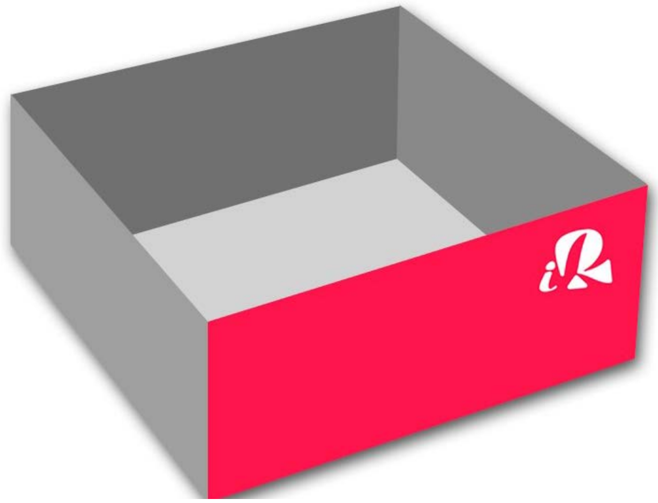
$x_1 = \frac{50 + \sqrt{652}}{6} = 12.52$

$x_1 = \frac{50 - \sqrt{652}}{6} = 4.07$

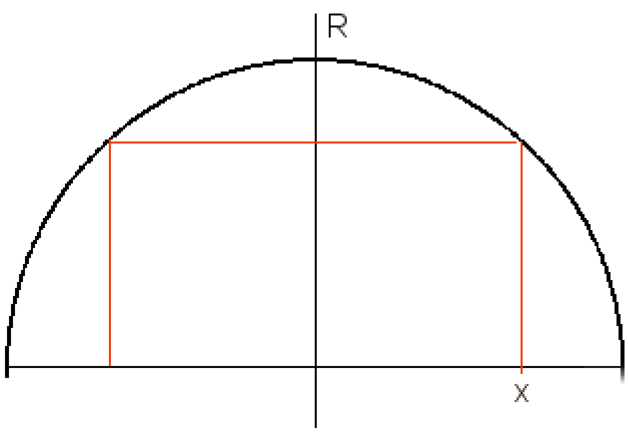
$v(4.07) = 4(4.07)^3 - 100(4.07)^2 + 616(4.07)$

$\boldsymbol{v(4.07) = 1120.30cm^3}$

Respuesta El máximo volumen de la caja es de 1120.30 cm³



Ejemplo 1.4.4 Área del rectángulo más grande inscrito en una semicircunferencia



Encuentre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio r.

Fórmula y operaciones

$x^2 + y^z = r^2$ $\qquad y^2 = r^2 - x^2$

$A = 2xy$ $\qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$A = 2 \times \sqrt{r^2 -} x^2$

$A'(x) = 2x\left(\frac{-x}{x\sqrt{r^2 - x^2}}\right) + 2\sqrt{r^2 - x^2}$

$A'(x) = \frac{-2x^2 + 20r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$A'(x) = \frac{-4x^2 + 2r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$\frac{-4x^2 + 2r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$

$4x^2 = 2r^2$

$x^2 = \frac{2r^2}{4}$

$x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$ $\qquad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$

Para determinar el área del rectángulo sustituimos:

$A = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot r\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2r^2}{2} = r^2$

Respuesta. El área del rectángulo que puede inscribirse es de r^2

Ejemplo 1.4.5 Dimensiones de una lata para minimizar su costo

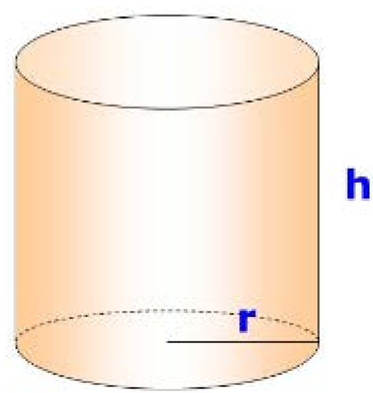
Se va a fabricar una lata que contenga 1 litro de aceite. Halle las dimensiones que minimizaran el costo del metal para fabricar la lata.

Sea h la altura del rectángulo y r el radio, el área total es igual a:

$At = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

También sabemos que el volumen de la lata es :

$\text{vol} = \pi r^2 \ h = 1 \ dm^3$



$h = 1000/(\pi r^2)$

Por tanto el área total la podemos expresar solo en términos del radio

$At = 2\pi r^2 + 2\pi r(1000/(\pi r^2))$

$At = 2\pi r^2 + 2000/r$

Ahora buscamos un punto crítico:

$dAt/dr = 4\pi r - 2000/r^2$

$4\pi r - 2000/r^2 = 0$

$r = 5.41926 \text{ cm}$

El radio mide 5.42 cm

$h = 1000/(\pi(5.41926)^2) = 10.87$ cm

El radio de la base de la lata medirá 5.41 cm

La altura medirá 10.87 cm

1.4.1. EJERCICIOS COMO APOYO EN LA CLASE

Problemas de razones de cambio relacionadas

1.- El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm /s y el ancho en 3 cm/s. Cuando la longitud es de 20 y el ancho es de 10 cm ¿Qué tan rápido se incrementó el are del rectángulo?

$$\frac{db}{dt} = 8\frac{cm}{s}$$

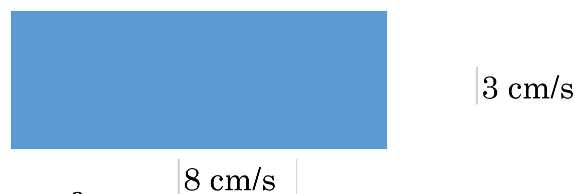
$$\frac{dh}{dt} = 3\frac{cm}{s}$$

$$\frac{dA}{dt} = ?\frac{cm}{s}$$

$$A = bh$$

$$\frac{dA}{dt} = b\frac{dh}{dt} + h\frac{db}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 20(3) + 10(8) = 140\frac{cm^2}{s}$$



2.- Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla y a una rapidez de 500 millas/h pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez a la cual la distancia desde el avión a la estación se incrementa cuando está a 2 millas de la estación.

$$\frac{da}{dt} = 500\, millas/h$$

$$\frac{dc}{dt} = ?\frac{millas}{h}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{2^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{5}\, milas$$

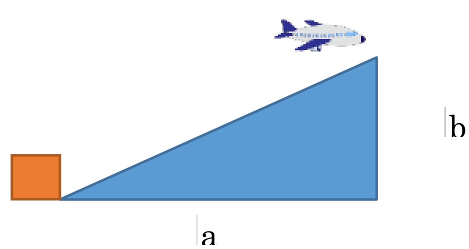
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + 1$$

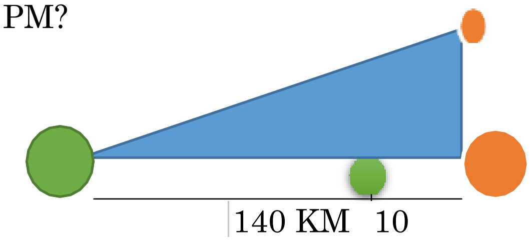
$$2c\frac{dc}{dt} = 2a\frac{da}{dt}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{a}{c} \cdot \frac{da}{dt}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{2}{\sqrt{5}}(500)$$



3.- Al medio día un barco A está a 150 km al oeste del barco B. El barco A navega hasta el este a 35 km/h y el barco B navega hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 4 PM?



$$\frac{dx}{dt} = 35\frac{km}{h}$$

$$\frac{dy}{dt} = 25\frac{km}{h}$$

$$x = 35(4) = 140 - 150$$
$$= 10km$$

$$y = 25(4) = 100\ km$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\cdot\frac{dy}{dt}$$

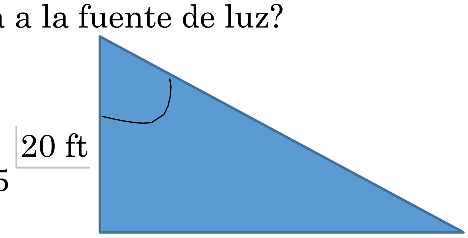
$$\frac{dz}{dt} = \frac{10}{100.4}\cdot 35 + \frac{100}{100.4}\cdot 25$$

$$km$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{10^2 + 100^2}$$
$$= 100.4\ km$$

5.-Un hombre Camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 ft/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre ¿Con que rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 ft del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?



$$\frac{d\emptyset}{dt}$$
$$= 15\ ft$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\frac{ft}{s}$$

$$tan\emptyset = \frac{x}{20}$$

$$x = 20tan\emptyset$$

$$\frac{dx}{dt} = 20sec^2\emptyset\frac{d\emptyset}{dt}$$

$$\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{1}{20}cos^2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{1}{20}cos^2x(4)$$

$$\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{1}{5}cos^2x$$

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

$$cos\emptyset = \left(\frac{20}{25}\right)^2$$

$$\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{20}{25}\right)^2 = 0.128\frac{rad}{s}$$

Problemas de aplicaciones de la diferencial de una función

1) Obtener el valor de $\sqrt{81.6}$, teniendo en cuenta que:

$$y = f(x) = \sqrt{x} \qquad\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Con el valor que nos dan de la raíz, sabemos que:

$$x = 81 \quad y \quad \Delta x \ o \ dx = 0.6$$

Entonces, tenemos que el valor de dicha raíz se da con la siguiente fórmula:

$$f(x) + f'(x)$$

Sustituyendo valores, tenemos que:

$$\sqrt{81.6} \approx \sqrt{81} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\sqrt{81 + 0.6} \approx 9 + \frac{1}{18}(0.6)$$

$$\sqrt{81.6} \approx 9 + \frac{(0.6)}{18} \approx \mathbf{9.033}$$

2) Obtener el valor de $\sqrt{256.17}$, teniendo en cuenta que:

$$y = f(x) = \sqrt{x} \qquad\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nuevamente, tenemos que:

$$x = 256 \quad y \quad \Delta x = 0.17$$

Con base en la fórmula:

$$f(x) + f'(x)$$

Solo sustituimos valores:

$$\sqrt{256.17} \approx \sqrt{256} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\sqrt{256+0.17} \approx 16 + \frac{1}{32}(0.17)$$

$$\sqrt{256.17} \approx 16 + \frac{(0.17)}{18} \approx 16.00944$$

3) Obtener el valor de $(\mathbf{5.17})^{\mathbf{3}}$, teniendo en cuenta que:

$$y = f(x) = x^3 \qquad\qquad f'(x) = 3x^2$$

Sabemos que:

$$x = 5 \quad y \quad \Delta x = 0.17$$

Tomando en cuenta la fórmula:

$$f(x) + f'(x)$$

Sustituimos los valores:

$$(5.17)^3 \approx 5^3 + 3(0.17)^2\, dx$$

$$(5+0.17)^3 \approx 125 + 3(0.0289)(0.6)$$

$$(5.17)^3 \approx 125 + 0.014739 \approx \mathbf{1}25.0147$$

4) El radio de un reloj de pared es de 15cm con un error de 0.25 cm. Estime el error de cálculo del área del reloj de pared. Calcule el error relativo y el error porcentual.

Anotamos el valor de "r" y "dr", que es el error que nos dan

$$r = 15cm$$

$$dr = 0.25cm$$

Ya que estamos hablando del área de un reloj, entonces necesitamos la fórmula del área de un círculo:

$$A = \pi r^2$$

Derivamos la fórmula de ambos lados:

$$dA = 2\pi r dr$$

Sustituimos los valores que previamente nos dieron:

$$dA = 2\pi(15)(0.25)$$

$$dA = 15\pi$$

$$dA \approx 47.1213cm$$

Para obtener el error relativo, tenemos que:

$$r = \frac{dA}{A}$$

Sustituimos y reducimos la ecuación:

$$r = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2}$$

$$r = \frac{2dr}{r}$$

$$r = \frac{2(0.25)}{15}$$

Así obtenemos el error relativo:

$$r = 0.333$$

Y para el error porcentual, solo multiplicamos por 100 y obtenemos:

$$r = 33.3\%$$

5) La medida de una cerca cuadrada es de 52m con un posible error de 2.6m. ¿Cuál es el porcentaje aproximado en el cálculo del área?

Anotamos los datos que nos dan:

$$P = 52cm \qquad dP = 2.6cm$$

Escribimos la fórmula del perímetro de un cuadrado:

$$P = 4L$$

Para obtener el valor de cualquiera de los lados, solo despejamos "L" de la fórmula:

$$L = \frac{P}{4} \qquad L = \frac{52}{4} \qquad L = 13$$

Para obtener el diferencial de uno de los lados, primero derivamos la fórmula del perímetro:

$$P = 4L$$

$$dP = 4dL$$

Despejamos dL y sustituimos:

$$dL = \frac{dP}{4} \qquad dL = \frac{2.6}{4}$$

$$dL = 0.65$$

Ahora necesitamos calcular el diferencial del área, así que escribimos la fórmula del área de un cuadrado y la derivamos:

$$A = L^2 \qquad dA = 2LdL$$

Sustituimos los valores de $L \; y \; dL$:

$$dA = 2(13)(0.65) \qquad dA = 16.9$$

Para el error relativo, sustituimos los valores de la fórmula: $L = \frac{dA}{A}$

$$L = \frac{16.9}{169} \qquad L = 0.1$$

Y para terminar, calculamos el error porcentual:

$$L = 10\%$$

6) La medida de la circunferencia de un círculo es de 78m con un posible error de 3.6m. Calcular el porcentaje de error en el área.

Anotamos los datos:

$$P = 78cm \qquad dP = 3.6cm$$

Para poder obtener el valor del radio, necesitamos la fórmula del perímetro de una circunferencia:

$$P = 2\pi r$$

Ahora solo despejamos "r" y sustituimos valores:

$$r = \frac{P}{2\pi}$$

$$r = \frac{78}{2\pi}$$

$$r = \frac{39}{\pi}$$

El siguiente paso es derivar la fórmula del perímetro, obteniendo:

$$dP = 2\pi dr$$

Despejamos dr de la ecuación y sustituimos para encontrar su valor:

$$dr = \frac{dP}{2\pi}$$

$$dr = \frac{3.6}{2\pi}$$

$$dr = \frac{\frac{36}{10}}{\frac{2\pi}{1}}$$

$$dr = \frac{36}{20}\pi$$

$$dr = \frac{9}{5}\pi$$

Ahora necesitamos derivar la fórmula del área de la circunferencia:

$$A = \pi r^2$$

$$dA = 2\pi r dr$$

Sustituimos los valores para obtener dA:

$$dA = 2\pi(\frac{39}{\pi})\ \frac{9}{5}\pi$$

$$dA = \frac{702}{5}\pi$$

$$dA \approx 441.07m$$

Para obtener el valor relativo, solo sustituimos los valores de la fórmula $r = \frac{dA}{A}$ y reducimos

$$r = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2}$$

$$r = \frac{2dr}{r}$$

$$r = \frac{2(\frac{9}{5\pi})}{\frac{39}{\pi}}$$

$$r = \frac{\frac{18}{5\pi}}{\frac{39}{\pi}}$$

$$r = \frac{18\pi}{195\pi}$$

$$r = 0.092$$

Ahora solo multiplicamos por 100 para el error porcentual y obtenemos que:

$$r = 9.2\ \%$$

Obtención de puntos críticos de una función y determinación de intervalos de crecimiento y concavidad

1) Dada la función $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 8x^2 + 3}$, determine los puntos máximoc y mínimos relativos

$f\,'(x) = 4x^3 - 16x$

$4x^3 - 16x\ = 0$

$4x(x+2)(x-2) =\ 0$

$x_1 = 0\,, x_2 = -2\,, x_3 = 2$

$f\,''(x) = 12x^2 - 16$

$f\,''(-2) = 12(-2)^2 - 16\ \rightarrow 32 > 0\quad Minimo$

$f\,''(0) = 12(0)^2 - 16\ \rightarrow -16 < 0\quad Maximo$

$f''(2) = 12(2)^2 - 16 \rightarrow 32 > 0 \ Minimo$

$$f(0) = (0)^4 - 8(0)^2 + 3 = 3$$

$$f(2) = (2)^4 - 8(2)^2 + 3 = -13$$

$$f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 + 3 = -13$$

Máximos (-1,-13),(2,-13) Mínimo(0,3)

2) Dada la función $\boldsymbol{f(x) = e^x(2x^2 + x - 8)}$, determine los puntos máximo y mínimo relativos

$f'(x) = e^x(2x^2 + x - 8) + e^x(4x + 1) = e^x(2x^2 + 5x - 7)$

$e^x(2x^2 + 5x - 7) = 0$

$2\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}\right) = 0$

$(x - 1)(x + \frac{7}{2}) = 0$

$x_1 = 1\,, x_2 = -\frac{7}{2}$

$f''(x) = e^x(2x^2 + 9x - 2)$

$f''(1) = e^x(2(1)^2 + 9(1) - 2) > 0 \ Minimo$

$f''\left(-\frac{7}{2}\right) = e^x\left(2\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 9\left(-\frac{7}{2}\right) - 2\right) < 0 \, Maximo$

$$f(1) = e^1(2(1)^2 + 1 - 8) = -5e$$

$$f\left(-\frac{7}{2}\right) = e^{-\frac{7}{2}}\left(2\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} - 8\right) = 13e^{-\frac{7}{2}}$$

Máximos (-7/2, $13e^{-\frac{7}{2}}$) Mínimo (1,-5e)

3) Dada la función $\boldsymbol{f(x) = e^{-x^2}}$ determine los puntos máximo y mínimo relativos, los intervalos de crecimiento, decrecimiento y concavidad

Calculamos derivada:

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

Igualamos a cero la función y resolver x para encontrar los máximos y mínimos

$-2xe^{-x^2} = 0$

$x = 0$ =>Punto critico

Intervalo	$-2xe^{-x^2}$	
$(-\infty, 0)$	+	Creciente
$(0, \infty)$	-	Decreciente

Calcular 2da derivada

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$e^{-x^2}(4x^{-2} - 2) = 0$

$(4x^{-2} - 2) = 0$

$\left(\frac{4}{x^2} - 2\right) = 0$

$4\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$

$x^2 = 2$ x=$\sqrt{2}$

Intervalo	$\left(\frac{4}{x^2} - 2\right)$	
$(-\infty, -\sqrt{2}\ )$	-	CAB
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2},)$	+	CAR
$(\sqrt{2}, \infty)$	-	CAB

Si x=0

$f(0) = e^{-0^2} = 1$

Si x= +$\sqrt{2}$

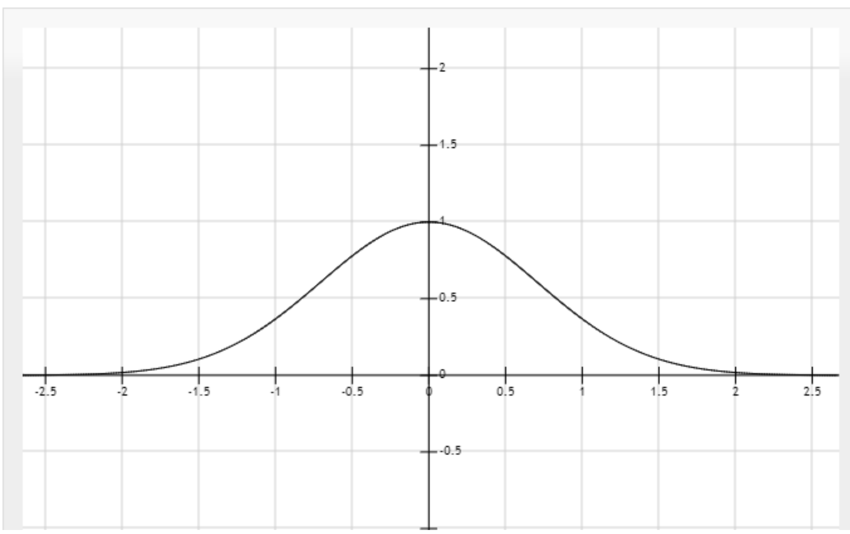
$f(0) = e^{-\sqrt{2}^2} = 0.1353$

Si x= $-\sqrt{2}$

$f(0) = e^{-(-\sqrt{2})^2} = 7.38$

Punto máximo (0,1)

Puntos de inflexión (0, 0.1353) (0, 7.38)



4) Dada la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x-1}}$ determine los puntos máximos, mínimos relativos así como los intervalos de crecimiento y concavidad.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

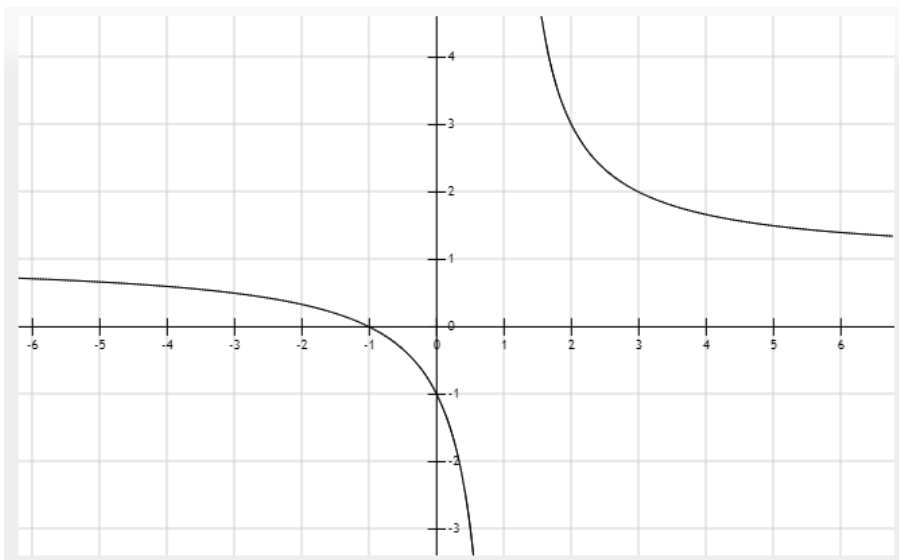
Buscamos los puntos en los que se anula la derivada

$f'(x) \neq 0$

Xe R-{1}

Puesto que la derivada es negativa, la función es decreciente en todo su dominio.

Intervalo	$\frac{-2}{(x-1)^2}$	
(-∞, 1)	-	Decreciente
(1, ∞)	-	Decreciente



5. g(x) = $\frac{y+1}{y^2-y+1}$

g ‘(x) = $\frac{(y^2-y+1)-[(2y-1)(y+1)]}{(y^2-y+1)^2}$

g ‘(x) = $\frac{(y^2-y+1)-(2y^2+y-1)}{(y^2-y+1)^2}$

g ‘(x) = $\frac{-y^2-2y+2}{(y^2-y+1)^2}$

$\frac{-y^2-2y+2}{(y^2-y+1)^2} = 0$

$- y^2 – 2y + 2 = 0$

$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(2)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{-2}$

$y_1 = - 1 - \sqrt{3} \approx -2.7$ $\qquad y_2 = \sqrt{3} – 1 \approx 0.7$

Intervalos	$g'(y) = - y^2 – 2y + 2$	
$(- \infty, - 1 - \sqrt{3})$	-	Mínimo
$(- 1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} – 1)$	+	Máximo
$(\sqrt{3} – 1, \infty)$	-	

$g''(x) = \frac{\frac{d}{dy}(-y^2 - 2y + 2)(y^2 - y + 1)^2 - (\frac{d}{dy}(y^2 - y + 1)^2(-y^2 - 2y + 2))}{((y^2 - y + 1)^2)^2}$

$g''(x) = \frac{(-2y - 2)(y^2 - y + 1)^2 - (2(y^2 - y + 1)(2y-1)(-y^2 - 2y + 2))}{((y^2 - y + 1)^2)^2}$

$g''(x) = \frac{-2(-y^3 - 3y^2 + 6y + 1)}{(y^2 - y + 1)^3}$

$\frac{-2(-y^3 - 3y^2 + 6y + 1)}{(y^2 - y + 1)^3} = 0$

$-2(-y^3 - 3y^2 + 6y + 1) = 0$

$y^3 + 3y^2 - 6y - 1 = 0$

$y_1 \approx 0.18$ $\quad y_2 \approx 1.22$ $\qquad y_3 \approx -4.41$

Ordenadas de los puntos críticos

$g(- 1 - \sqrt{3}) = \frac{(- 1 - \sqrt{3}) + 1}{(- 1 - \sqrt{3})^2 - (- 1 - \sqrt{3}) + 1} = - 0.1$

$g(\sqrt{3} – 1) = \frac{(\sqrt{3} - 1) + 1}{(\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{3} - 1) + 1} = 2.1$

$g(0.18) = \frac{(0.18) + 1}{(0.18)^2 - (0.18) + 1} = 1.38$

$g(0.22) = \frac{(0.22) + 1}{(0.22)^2 - (0.22) + 1} = 1.75$

$g(-4.41) = \frac{(-4.41) + 1}{(-4.41)^2 - (-4.41) + 1} = -0.13$

Punto Máximo ($\sqrt{3}-1$, 2.1) Punto Mínimo (- 1 - $\sqrt{3}$, - 0.1) Punto de Inflexión (0.18, 1.38), (1.22, 1.75) y (- 4.41, - 0.13)

6. Determine los puntos máximos y mínimos relativos de f(t) = 2cost + sen2t, $[0, \frac{\pi}{2}]$

$f'(x)$ = -2sent + 2cos2t

-2sent + 2cos2t = 0

-2sent + 2[cos²t –sen²t] = 0

-2sent + 2[1 - sen²t – sen²t] = 0

- 2sent + 2 - 4 sen²t = 0

4 sen²t + 2sent - 2 = 0

Sent = x

$4x^2 + 2x - 2 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-2)}}{2(4)} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{8}$$

$X_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = -1$

sent = $\frac{1}{2}$ $t_1 = sen^{-1}\frac{1}{2}$ $t_1 = \frac{1}{6}\pi = 30°$

sent = -1 $t_1 = sen^{-1}(-1)$ $t_1 = -\frac{1}{2}\pi = 270°$ ← no es válido ya que pasa a $\frac{\pi}{2}$

Intervalos	$f'(x)$ = -2sent + 2cos2t
$(0, \frac{1}{6}\pi)$	+
$(\frac{1}{6}\pi, \frac{\pi}{2})$	-

Má

$f(\frac{1}{6}\pi) = 2\cos(\frac{1}{6}\pi) + \text{sen}2(\frac{1}{6}\pi)$

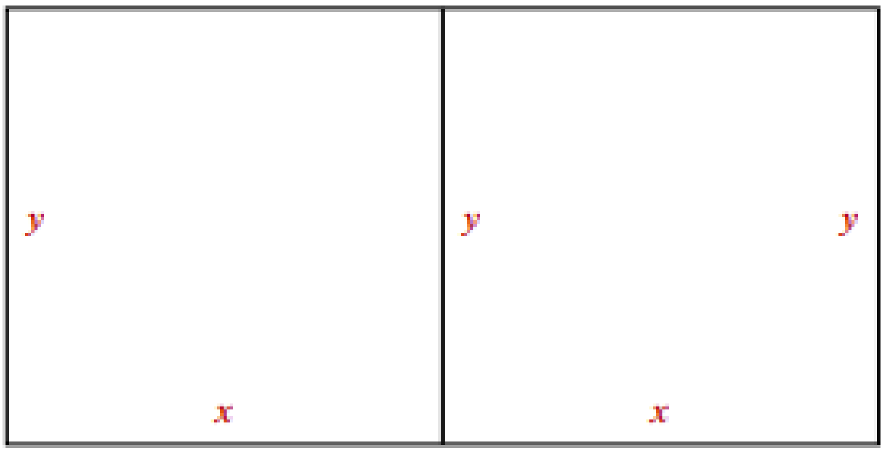
$f(\frac{1}{6}\pi) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f(\frac{1}{6}\pi) = 2.59$

Punto Máximo absoluto ($\frac{1}{6}\pi, \frac{3\sqrt{3}}{2}$) o (0.52, 2 .59)

Problemas de optimización

1) Un ranchero tiene 300 m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.



Tenemos que el perímetro y el área de los corrales son, respectivamente:

$P = 4x + 3y = 300$ y $A = 2xy$

Pero como $y = 300 - 4x$

$$A(x) = \frac{2x(300-4x)}{3} = 200x - \frac{8}{3}x^2$$

Derivando y obteniendo los puntos críticos

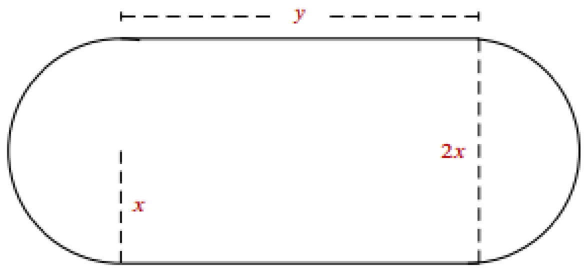
$$A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x = 0 \leq \frac{16}{3}x = 200 \leq x = \frac{3*200}{16} = \frac{75}{2}\ es\ el\ punto\ critico$$

Y como

$$A''(x) = -\frac{16}{3} < 0\ entonces\ se\ trata\ de\ un\ maximo$$

$El\ area\ maxima\ ocurre\ para\ x = \frac{75}{2}m\ \ y\ \ y = \frac{300-150}{3}$ =50 m que son las dimensiones pedidas

2.- Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de 50 m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.



El área del terreno es:

$$A = 2xy + \pi x^2$$

El perímetro, $P = 50m$ está dado por $P = 2y + \pi x$, por lo que

$$2y + \pi x = 50 \;\rightarrow y = \frac{50 - 2\pi x}{2} = 25 - \pi x$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del área, la tendremos expresada como función de una variable x:

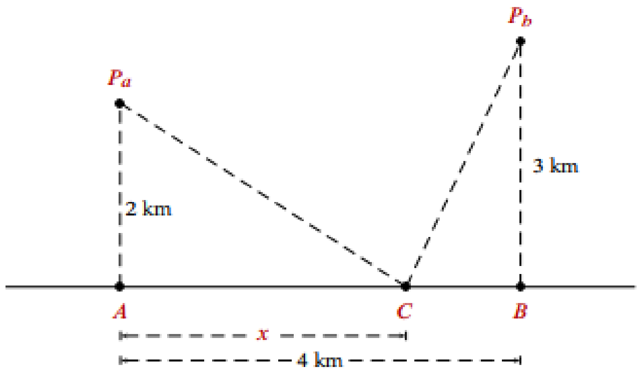
$$A'(x) = 2x(25 - \pi x) + \pi x^2 = 50x + x^2(\pi - 2\pi) = 50x - \pi x^2$$

Su punto crítico se obtiene cuando A'(x). Esto es:

$$A'(x) = (50x - \pi x^2)' = 50x - 2\pi x = 0 \leftrightarrow x = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}$$

Como $A''(x) = -2\pi < 0$, se trata en efecto de un máximo; además $y = 25 - \pi\frac{25}{\pi} = 0$, es decir, el área máxima se obtiene cuando el terreno tiene la forma circular

3.- Dos poblados Pa y Pb están a 2 km y 3 km, respectivamente, de los puntos más cercanos A y B sobre una línea de transmisión, los cuales están a 4 km uno del otro. Si los dos poblados se van a conectar con un cable a un mismo punto de la línea, ¿cuál debe ser la ubicación de dicho punto para utilizar el mínimo de cable?



Sea C el punto de conexión ubicado, digamos, a x km del punto A y por supuesto a 4 - x km del punto B. Si l es la longitud del cable utilizado para conectar Pa y Pb con C, entonces:

$$l = P_aC + P_bC = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(4-x)^2 + 3^2}$$

La función a minimizar es:

$$l(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{(4-x)^2+9} = (x^2+4)^{\frac{1}{2}} + [(4-x)^2+9]^{\frac{1}{2}}$$

Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$l'(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}2x + \frac{1}{2}[(4-x)^2+9]^{-\frac{1}{2}}2(4-x)(-1)$$

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}}$$

$$l'(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} \rightarrow$$

$$x\sqrt{(4-x)^2+9} = (4-x)\sqrt{x^2+4}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$x^2\left[\sqrt{(4-x)^2+9}\right] = (4-x)^2(x^2+4) \rightarrow x^2(4-x)^2 + 9x^2 = x^2(4-x)^2 + 4(4-x)^2 \rightarrow$$

$$9x^2 = 4(4-x)^2 \rightarrow 9x^2 = 4(16-8x+x^2) \rightarrow$$

$$9x^2 = 64 - 32x + 4x^2 \rightarrow 5x^2 + 32x - 64 = 0$$

Esta última ecuación tiene por soluciones:

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4(5)(-64)}}{2(5)} = \frac{-32 \pm \sqrt{2304}}{10} = \frac{-32 \pm 48}{10}$$

De donde se obtienen dos puntos críticos que son:

$$x_1 = \frac{-32 + 48}{10} = \frac{16}{10} = 1.6 \quad asi\ como \quad x_2 = \frac{-32 - 48}{10} = -\frac{80}{10} = -8$$

Claramente el valor x2 = - 8 < 0 es descartado y sólo consideramos x1 = 1.6.

Ya que

$$l''(x) = \frac{4}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4-x}{[(4-x)^2+9]^{\frac{3}{2}}}$$

Entonces $l''(x) > 0$ para cada x. En particular $l''(1.6) > 0$, por lo que l(x) es mínima cuando x = 1.6 km.

Puesto que $0 \leq x \leq 4$, calculemos los números $l\,(0), l\,(1.6), l\,(4)$, la manera de ejemplo:

$$l\,(0) = \sqrt{0^2+4} + \sqrt{(4-0)^2+9} = 2 + \sqrt{25} = 2 + 5 = 7$$

$$l\,(1.6) = \sqrt{1.6^2+4} + \sqrt{(4-1.6)^2+9} = \sqrt{6.56} + \sqrt{14.76} = 6.4$$

$$l\,(4) = \sqrt{4^2+4} + \sqrt{(4-4)^2+9} = \sqrt{20} + 3 = 7.5$$

Se ve pues que l(x) es menor cuando x =1.6 km, siendo la longitud mínima del cable igual a 6.4 km aproximadamente.

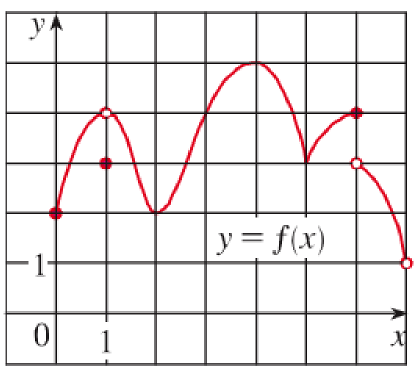
1.4.2 EJERCICIOS PARA RESOLVER POR PARTE DEL ESTUDIANTE

Instrucciones

A continuación encontrarás una serie de ejercicios y problemas para que resuelvas. De los problemas 1 al 10 aparecen espacios para que los completes con los valores correspondientes, de acuerdo con lo solicitado en el problema.

Del problema 11 en adelante aparecen recuadros, los cuales puedes usar para escribir tus propuestas de solución.

1) Use la gráfica para determinar los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.



Máximo absoluto (,)

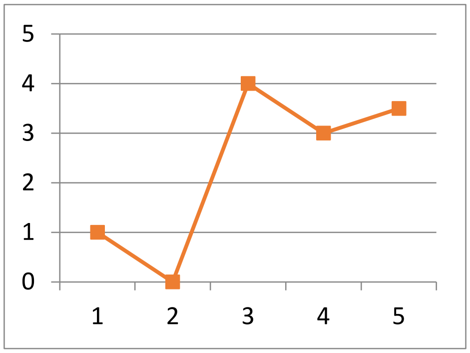
Mínimo absoluto (,)

Máximos locales (,) y (,)

Mínimos locales (,), (,) y (,)

Dibuje en el espacio en blanco una gráfica de una función f que sea continua en [1, 5] y tenga las propiedades dadas.

2)



Máximo absoluto (,)

Mínimo absoluto (,)

Máximo local (,) y (,)

Mínimo local (,)

a) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y sea derivable

b) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea derivable en 2

c) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea continua en 2

2) Trace la gráfica de la función de f y use su boceto para encontrar los valores máximos y mínimos absolutos y locales de $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geq 1$

Punto máximo absoluto (,)

Punto mínimo (,)

5) Encuentre los números críticos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

$f'(x) =$

$x_1 =$ $x_2 =$

Intervalos	$f'(x) =$
(- ∞, -)	
(,)	
(,)	

$f''(x) =$

Ordenadas de los puntos críticos

Punto Máximo (,) Punto Mínimo (,) Punto de Inflexión (,)

6.- $f(x) = x^3 + e^{-3x}$

$f'(x) =$

$x_1 =$ $x_2 =$

Intervalos	$f'(x)$
$(-\infty, \ )$	
$(\ , \ )$	
$(\ , \infty)$	

$f''(x)=$

$x_1 =$ $x_2 =$

Ordenadas de los puntos críticos

Punto Máximo (,) Punto Mínimo (,) Punto de Inflexión ( ) y ( )

7.- Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

8.- Se bombea gas a un globo esférico a razón de 6m3/min. Si la presión se mantiene constante. ¿Cuál es la velocidad con la que cambia el radio del globo cuando el diámetro mide 120 cm?

9.- En el siguiente cuadro se muestran los resultados de siete mediciones de distancia (N=7) recorrida por un carrito de laboratorio:

Medición	**Medición (x)**
N°	cm
1	2,83
2	2,85
3	2,87
4	2,84
5	2,86
6	2,84
7	2,86

Determinar:

a) El valor probable o verdadero (V).
b) Error absoluto, error relativo y error porcentual de la 3° medición.

9.- Obtener los máximos y mínimos de

$f(x) = x3 - 3x + 2$

10.- Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de 1milla y a una rapidez de 500millas/hora pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez a la cuál la distancia desde el avión a la estación se incrementa cuando está a 2millas de la estación.

11.- Un tanque cilíndrico con 5m de diámetro se está llenando con agua a razón de $3cm^3$. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de agua?

12.- La medición efectuada del lado de un cuadrado fue de 10cm, con un error posible de ±3cm. Utilice diferenciales para evaluar una aproximación al error máximo en el área.

13.- Se midió el radio de una esfera y se encontró que es de 21cm, con un posible error en la medición de cuando mucho 0.05cm. ¿Cuál es el error máximo del volumen de la esfera y el error relativo?

14.- La circunferencia de una esfera se midió en 84cm con un posible error de 0.5cm:

Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada y determine el error relativo.

a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado y diga cuál es el error relativo.

15.- Encontrar los máximos y mínimos, dada la siguiente función: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

16.- Encontrar los máximos y mínimos, intervalos de crecimiento, decrecimiento y concavidad, dada la siguiente función: $f(x) = 10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$

17.- De una pieza cuadrada de hojalata de lado a, se desea construir una caja abierta por arriba del mayor volumen posible, cortando de las esquinas cuadradas iguales y doblando hacia arriba la hojalata para formar los lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

18.- Encontrar los máximos, mínimos, intervalos de crecimiento, decrecimiento y concavidad de la siguiente función: $f(x) = 3 + 4x - 2x^2$

19.- Encontrar los máximos y mínimos de la siguiente función $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

20.- Encontrar los puntos máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y concavidad de la función: $f(x) = (x-5)^2$

21.- Encontrar los puntos máximos y mínimos de la función: $f(x) = x - 3x^3$

22.- Con una cartulina de 8x5 metros se desea construir una caja sin tapa, de volumen máximo. Hallar las dimensiones de dicha caja.

23.- Un rectángulo está acotado por los ejes y por la gráfica de $y=(6-x)/2$ ¿Qué longitud debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?

24.- Se pide calcular el volumen máximo de un paquete rectangular enviado por correo, que posee una base cuadrada y cuya suma de anchura + altura + longitud sea 108.

1.4.3. Examen de opción múltiple

1.- El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm y el ancho a razón de 3 cm . Cuando el largo es 20cm y el ancho es 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

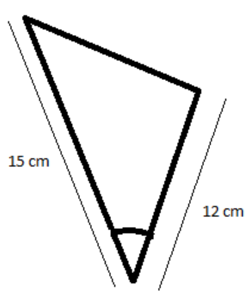
a) 140 cm/s^2 b)280 cm^2/s c)140 cm^2/s d)50 cm^3/s

2.-Se infla un globo esférico y su volumen crece a razón de 100 cm3□s.

¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

a)$1/25\,\pi$ b)0.5 c)0 d)1

3.- Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 y 15 m. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 2°/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60°?



a) .761 m/min
b) 1.359 m/min
c) .365 m/min
d) 2.587 m/min

4.- Un bote se jala hacia un muelle mediante una soga unida a la proa y que pasa por una polea que se encuentra instalada en el muelle a 1 m más arriba que la proa del bote. Si la soga se jala a una rapidez de 1 m/s, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando éste se encuentra a 8 m de éste?

a) $\frac{\sqrt{65}}{8} m/s$
b) $\frac{8}{\sqrt{65}} m/s$
c) $8\sqrt{65}\, m/s$
d) $\frac{8\sqrt{65}}{65} m/s$

5.- Suponga que un incendio forestal se propaga en la forma de un círculo cuyo radio cambia a razón de 1.8 m/min ¿A qué razón está creciendo el área de la región incendiada cuando el radio alcanza 60 m?

a) $\frac{dA}{dt} \approx 679m^2/min$

b) $\frac{dA}{dt} \approx 900m^2/min$

c) $\frac{dA}{dt} \approx 679m^2/h$

d) $\frac{dA}{dt} \approx 679m^2/min$

6.- La circunferencia de una esfera se midió como 84 cm, con un posible error de 0.5cm.

Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?

a) 0.0000000001

b) 0.2

c) 1

d) 0.0119

7.-Se encontró que la arista de un cubo es 30 cm, con un posible error en la medición de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible, el error relativo y el porcentaje de error al calcular a) el volumen del cubo y b) el área superficial del cubo.

a) V=270cm^3, 0.01, 1% y A=36cm^2, 0.006, .6%
b) A=270cm^3, 0.01, 1% y V=36cm^2, 0.006, .6%
c) A=2700cm^3, 0.1, .1% y V=360cm^2, 0.06, 6%
d) A=27cm^3, 0.01, 1% y V=360cm^2, 0.006, .6%

8.- Con base en el ejercicio anterior calcular el porcentaje de error que se tuvo al medir la arista del cubo

a) 15%
b) 4%
c) 10%
d) 1%

9.- Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm.

a) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.

b) ¿Cuál es el porcentaje de error?

a)$\pi \frac{24}{5} cm$

b) $\pi \frac{48}{5} cm$

c)$\pi \frac{32}{5} cm$

d)$\pi \frac{40}{5} cm$

10.- Calcule el error relativo cometido en el cálculo del volumen de una esfera de 12.51 mm de diámetro, con un posible error posible de 0.01 mm, medido con un instrumento que aprecia milésimas de centímetro.

a)1mm b)0.0048mm c) 0.50mm d)20cm

11.-Una caja con una base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que ha de utilizarse.

a) $a \leq 40$

b) $a \geq 40$

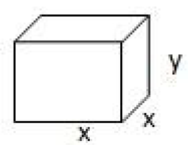
c) $a \leq 50$

d) $a \geq 10$

12.- Una tienda ha estado vendiendo 200 reproductores de discos Blu-ray por semana a \$350 cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada \$10 de descuento ofrecido a los compradores, el número de unidades vendidas se incrementará en 20 a la semana. Encuentre la función demanda y la función ingreso. ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la tienda para maximizar sus ingresos?

a)100 b)200 c)150 d)125

13.- Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y sin tapa; encuentre el mayor volumen posible de la caja.



a) 4000 cm^3
b) 2500 cm^3
c) 4500 cm^3
d) 3500 cm^3

14.- Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 metros, cuya área sea tan grande como sea posible.

a) 24 * 26
b) 23 * 27
c) 75/2 *25/2
d) 25 * 25

15.- Se desea construir una valla alrededor de un campo rectangular, y dividido en dos parcelas por otra valla paralela a uno de los lados. Si el área del campo es dada, hallar la razón de los lados para que la longitud total de las vallas sea la mínima.

a)2/3 b) 3/2 c) 6/2 d) 5/4

16.- Encuentre los números críticos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

a) x=-3 y x=2

b) x=0 y x=3

c) x=10 y x=0

d) x=3 y x=-2

17.- Encuentre los números críticos de la función. F(x)= x^3+3x^2-24x

a) x=4, y x=-8

b) x=-4, y x=2

c) x=4, y x=-2

d)x=6, y x=-5

18.- Un modelo para el precio promedio en EU de una libra de azúcar blanca desde 1993 a 2003 está dado por la función:

$$A(t) = 0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.4074t + 0.4074$$

donde t es medido en años desde agosto de 1993. Estime los tiempos cuando el azúcar era más barata y más cara durante el periodo 1993-2003.

a) Mínimo= agosto 1993
   Máximo= agosto 2003
b) Mínimo= octubre 1998
   Máximo= diciembre 1994
c) Mínimo= junio 1994
   Máximo= marzo de 1998
d) Mínimo= enero 1993
   Máximo= diciembre 1993

19.- Encuentre los números críticos de la función

$$f_{(x)} = x^5 - x^3 + 2$$

a) $X_1=\sqrt{\frac{15}{25}}$, $X_2=1$, $X_3=-\sqrt{\frac{15}{25}}$, $X_4=1$

b) $X_1=0$, $X_2=1$, $X_3=\sqrt{\frac{5}{3}}$, $X_4=-\sqrt{\frac{5}{3}}$

c) $X_1=\sqrt{\frac{3}{5}}$, $X_2=-\sqrt{\frac{3}{5}}$, $X_3=0$, $X_4=1$

d) $X_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}$, $X_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$, $X_3=0$, $X_4=0$

20.- Grafique la función $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ con $-1 \leq x \leq 4$. Y a partir de su gráfica encuentre los máximos y mínimos absolutos y locales.

a) Máx.A (-1,37) ; Mín.A (3,-27) ; Máx.L (1,5) ; Mín.L (0,0)

b) Máx.A (1,37) ; Mín.A (-3,-27) ; Máx.L (1,5) ; Mín.L (0,0)
c) Máx.A (1,-37) ; Mín.A (3,-27) ; Máx.L (-1,5) ; Mín.L (0,0)
d) Máx.A (-1,77) ; Mín.A (-3,27); Máx.L (-1,-5); Min.L(0,5)

UNIDAD 2

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

2.1 Área entre curvas

Definición 2.1.1. Área entre la gráfica de una función y el eje x

Como primer paso, nos interesa calcular el área comprendida entre la gráfica de una función f y el eje x entre x = a y x = b, sabiendo que f es integrable en [a; b]. En primer lugar, consideraremos el caso en que la gráfica de f está por arriba del eje x. Figura 2.1.

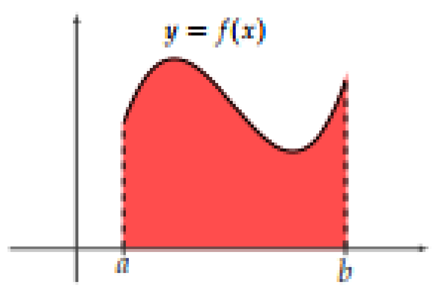


Figura 2.1 Representación del área debajo de una curva

Al introducir la noción de integral vimos que:

Si la función f es positiva o cero en el intervalo [a; b], el área de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de la función f entre los lımites a y b es:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 2.1.1

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1\ entre\ x = 1\ y\ x = 3$. Figura 2.2.

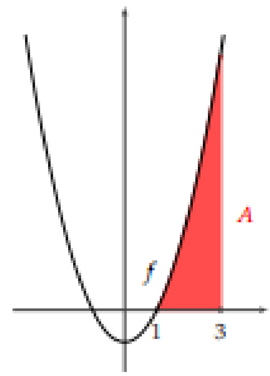


Figura 2.2 Representación del área entre la gráfica de la función y el eje x

Como la función f es positiva o cero en el intervalo [1; 3], el área A esta dada por

$$A = \int_1^3 (x^2 - 1)\, dx$$

Para calcular la integral, podemos usar la regla de Barrow. Como $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ es una primitiva de $f(x) = x^2 - 1$, tenemos que:

$$A = \int_1^3 (x^2 - 1)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\binom{3}{1} = \left(\frac{1}{3}3^3 - 3\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - 1\right) = 6 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

El segundo caso que consideramos es cuando la gráfica de f está por debajo del eje x. Figura 2.3.

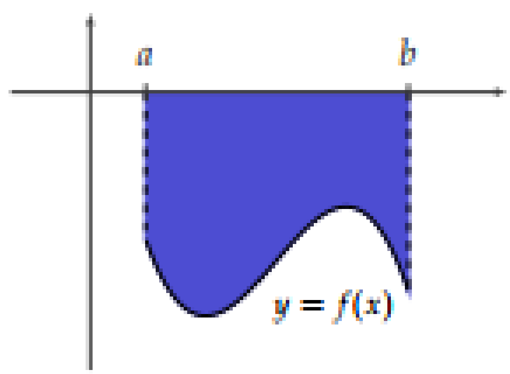


Figura 2.3 Representación del área entre la función y el eje x.

Es decir, la función f es negativa o cero en el intervalo [a; b].

En esta situación, la integral definida da el área de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de la función f pero con el signo cambiado (es decir, da negativo). Por lo tanto, para calcular el área, bastará con cambiar el signo de la integral.

Si la función f es negativa o cero en el intervalo [a; b], el área de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de la función f entre los límites a y b es

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 2.1.2

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - 1 \; entre \; x = -2 \; y \; x = 1$

En el siguiente gráfico (figura 2.4), aparece sombreada la región en cuestión:

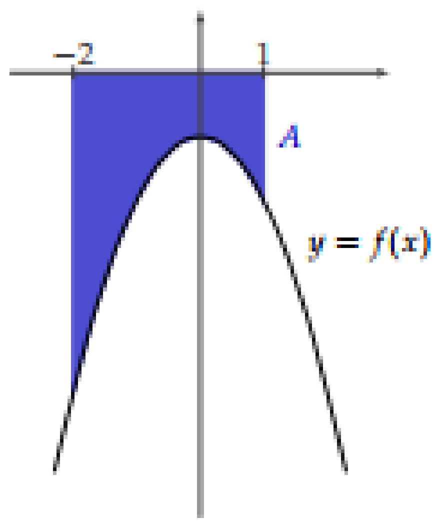


Figura 2.4. Representación del área entre la cura y el eje x.

La función f toma valores negativos en todo R, con lo cual el área A buscada es

$$A = -\int_{-2}^{1} (-x^2 - 1)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\binom{1}{-2} = \left(\frac{1}{3}1^3 + 1\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)\right) = \frac{4}{3} + \frac{14}{3}$$
$$= 6$$

Finalmente, si se quiere calcular el área de la región comprendida entre el grafico de una función f y el eje $x = a$ y $x = b$ en el caso en que f toma valores positivos y negativos en el intervalo [a; b], se deben estudiar los cambios de signo de la función en el intervalo considerado.

Por ejemplo, para calcular el área de la región sombreada en la figura 2.5

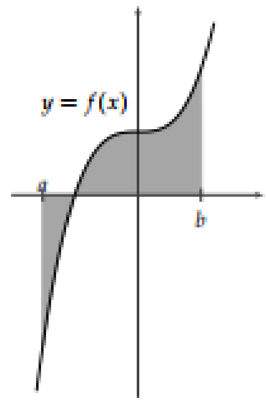


Figura 2.5. Representación del área entre la gráfica y el eje x

Podemos descomponerla en dos áreas que ya sabes calcular: si c es el punto de intersección de la gráfica de f con el eje x (es decir, el punto del intervalo [a; b] donde la función vale 0), entonces, como se puede ver en el gráfico, $f(x) \leq 0 \; para \; todo \; x \; \in [a; c] \; y \; f(x) \geq 0 \; para \; todo \; x \; \in [c; b]$. Figura 2.6.

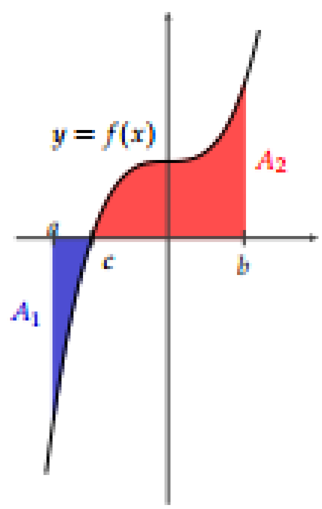


Figura 2.6 Descomposición en dos áreas

Entonces, podemos calcular el área A1 comprendida entre la gráfica de f y el eje x para $a \leq x \leq c$ y el área A2 comprendida entre la gráfica de f y el eje x para $c \leq x \leq b$, y obtener el área A como la suma de estas dos áreas:

$$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 2.1.3

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ entre x=-1 y x=2.

Veamos primero si La gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ corta el eje x para algún valor $x \in [-1;\ 2]$. Para lo cual se determinan los valores que hacen cero la función f:

$$x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = -3$$

De estos dos ceros $1 \in [-1; 2]\, y -3 \notin [-1; 2]$, con lo cual solo nos interesa x=1.Hagamos un gráfico aproximado para ver cuál es el área pedida: Figura 2.7.

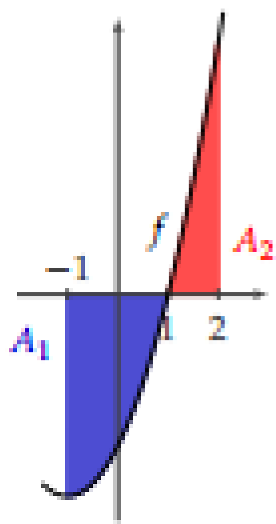


Figura 2.7. Representación de las dos áreas

Tenemos que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [-1; 1]\, y\, f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1; 2]$. Entonces el área a calcular es

$$A = A_1 + A_2 = -\int_{-1}^{1} (x^2 + 2x - 3)\,dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3)\,dx$$

Para calcular las integrales definidas en cuestión, usamos la regla de Barrow. Como una primitiva de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ es $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$, obtenemos:

$$A = -\left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) + \left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1)\right)\right)$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2 - 3(2)\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right)\right) = -\left(-\frac{16}{3}\right) + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$$

Definición 2.1.2 Área entre la gráfica de dos funciones

Nos interesa ahora calcular el área de una región comprendida entre las gráficas de dos funciones integrables f y g.

Consideremos, en primer lugar, la situación del siguiente gráfico:

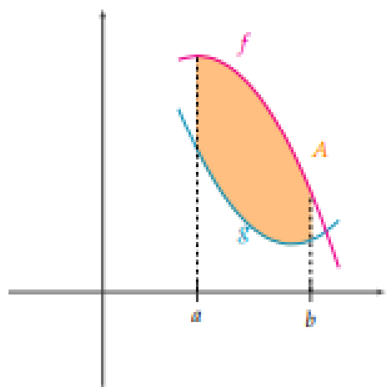


Figura 2.8. Representación del área entre dos curvas

Queremos calcular el área comprendida entre los gráficos de $f\ y\ g\ para\ a \leq x \leq b$. En este caso, $f(x) \geq g(x) para\ todo\ x\ \in [a; b]$

Como puede verse en los gráficos siguientes, el área A resulta ser la diferencia entre 2 áreas: el área A1 de la región comprendida entre el grafico de f y el eje x para $a \leq x \leq b$ y el área A2 de la región comprendida entre el grafico de g y el eje x para $a \leq x \leq b$

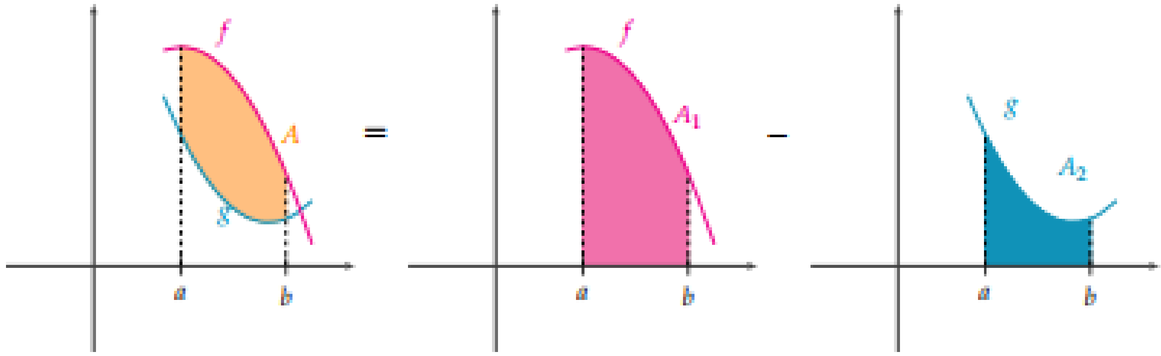


Figura 2.9 Descomposición del área comprendida entre dos funciones

Como f y g toman valores positivos en [a; b], entonces

$$A_1 = \int_a^b f(x)dx \quad y \;\; A_2 = \int_a^b g(x)dx$$

Y, por lo tanto, el área A buscada es

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Si las funciones f y g cumplen que $f(x) \geq g(x) para\ todo\ x \in [a; b]$, el área de la región comprendida entre los gráficos de f y g para $a \leq x \leq b$ es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Si bien anteriormente consideramos el caso que f y g son funciones no negativas en el intervalo [a; b], la fórmula anterior vale siempre que f y g cumplan que $f(x) \geq g(x)$, aunque tomen valores negativos. Para ver esto, consideramos la gráfica de la figura 2.10.

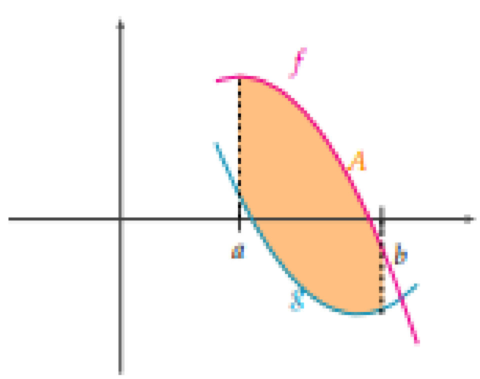


Figura 2.10. Representación del área

En este caso, ambas funciones f y g toman valores positivos y negativos en el intervalo [a; b].

Observemos que el área de la región no cambia si la trasladamos (manteniendo su forma y dimensiones). Como la región es acotada, haciendo una traslación en sentido vertical, podemos conseguir que toda la región quede por encima del eje x y, en consecuencia, reducimos al caso ya analizado. Para hacer esta traslación, basta sumarles la misma constante K, suficientemente grande, a f y a g, de manera que $g(x) + K \geq 0$ para todo $x \in [a; b]$ y entonces, $f(x) + K \geq g(x) + K \geq 0$ para toda $x \in [a; b]$. Gráficamente. (Figura 2.11).

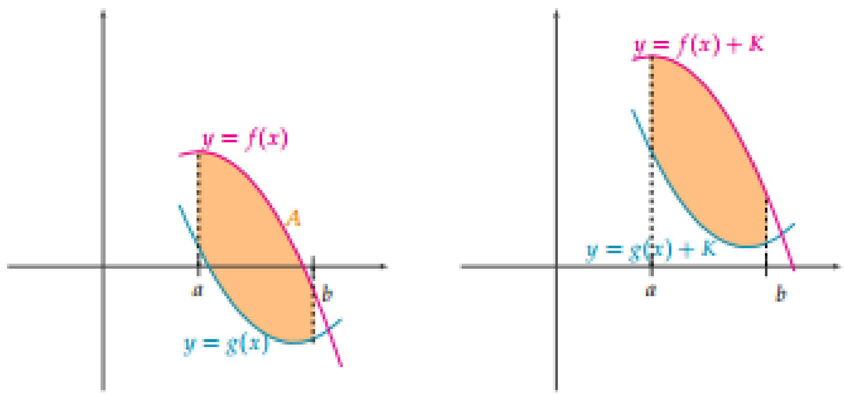


Figura 2.11 Representación de las áreas entre dos funciones y la traslación de ellas

Así, el área de la región es

$$A = \int_a^b ((f(x) + K) - (g(x) + K))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

En resumen Si bien la integral tiene varias aplicaciones una de las más comunes es su uso para encontrar áreas entre curvas o entre funciones. Para esto nos basaremos en la fórmula:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

sí a la hora de graficar nuestras funciones nos conviene usar rectángulos verticales o en caso contrario, es decir sí usamos rectángulos horizontales usaremos la fórmula:

$$A = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy$$

Ejemplo 2.1.4

Calcular el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = 2x - 1$

En primer lugar, hagamos una gráfica aproximada de la región cuya área queremos calcular. Figura 2.12.

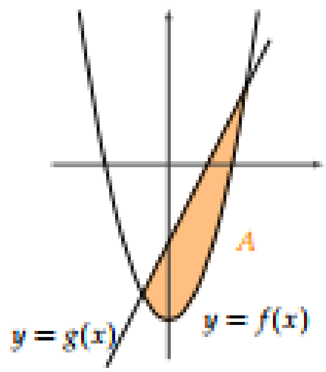


Figura 2.12 Representación del área entre la recta y la parábola

La región está limitada por los valores de x correspondientes a los dos puntos en los que se intersectan los gráficos de f y g; es decir, los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.

Calculemos estos valores:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = -\frac{1}{3}$$

Entonces, los valores de x que delimitan el área son $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$. Como podemos observar en la figura 2.13, $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \in [-\frac{1}{3}; 1]$.

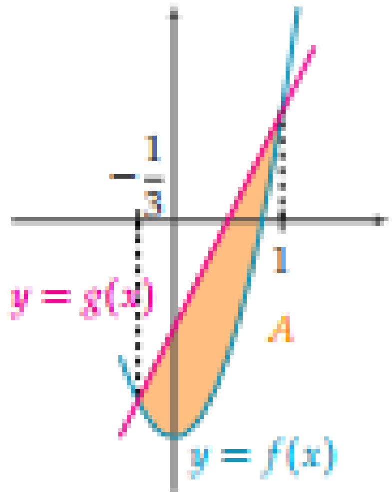


Figura 2.13 Representación del área entre dos funciones

Por lo tanto, el área de la región encerrada entre los gráficos de f y g es

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} (g(x) - f(x))dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(2x - 1 - (3x^2 - 2)\right)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} (-3x^2 + 2x + 1)dx$$

$$= (-x^3 + x^2 + x)\left\langle \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{matrix} \right\rangle = 1 - \left(-\frac{-5}{27}\right) = \frac{32}{27}$$

Ejemplo 2.1.5

Encontrar el área comprendida por la función $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x^2 - 2$

1. Lo primero que se tiene que hacer es igualar nuestras funciones para ver donde se interceptan y de esa manera podamos encontrar nuestros límites para aplicar nuestra fórmula.

$$x + 4 = x^2 - 2$$
$$x^2 - x - 2 - 4 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3)(x + 2) = 0$$
$$\therefore x_1 = 3 \;\; y \;\; x_2 = -2$$

Una vez encontrados nuestros puntos de intercepción es 100% recomendable graficar las funciones para saber qué área calcularemos.

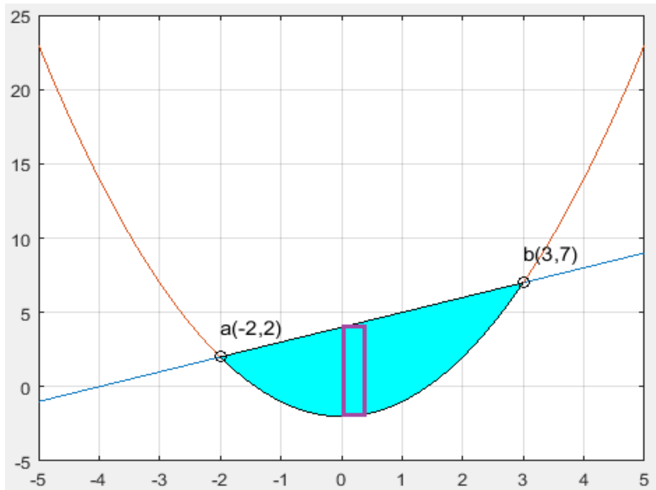


Figura 2. 14 Rectángulo representativo

Ya tenemos nuestra gráfica y cómo podemos observar nos conviene usar rectángulos verticales ya que tocan ambas funciones.

2. Ahora si podemos plantar nuestra fórmula para el área.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_{-2}^{3} [(x+4) - (x^2 - 2)]dx$$

3. Finalmente resolvemos la integral y de esa forma se obtiene el área deseada.

$$A = \int_{-2}^{3} [(x+4) - (x^2 - 2)]dx = \int_{-2}^{3} (x + 4 - x^2 + 2)dx$$

$$A = \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)dx = [-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x] \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$

$$A = \left[\frac{27}{2}\right] - \left[-\frac{22}{3}\right] = \frac{\mathbf{125}}{\mathbf{6}}\ \boldsymbol{u^2}$$

Ejemplo 2.1.6

Encontrar el área comprendida por la función $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 4$

1. Igual que en el ejemplo anterior encontramos nuestros puntos de intercepción igualando las funciones:

$$-x^2 + 4 = x^2 - 4$$
$$-x^2 - x^2 + 4 + 4 = 0$$
$$-2x^2 + 8 = 0$$
$$2x^2 - 8 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$- \therefore x_1 = 2 \;\; y \;\; x_2 = -2$$

2. Ahora graficamos.

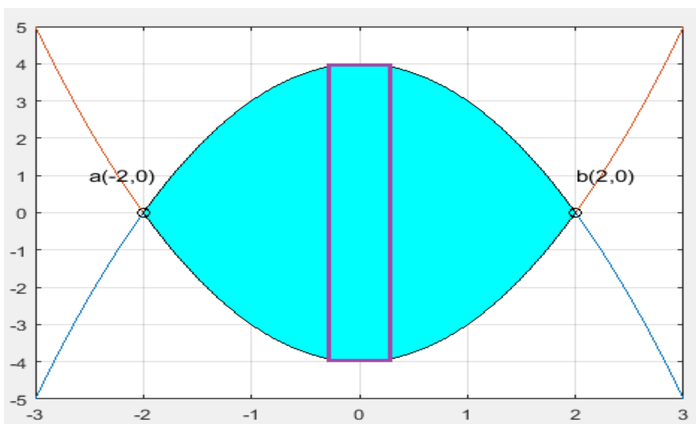


Figura 2.15 Representación del rectángulo muestra

Como nos podemos dar cuenta también nos conviene usar rectángulos verticales ya que de esa manera se tocan ambas funciones.

3. De nueva forma planteamos nuestra integral en base a la fórmula.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$
$$A = \int_{-2}^{2} [(-x^2 + 4) - (x^2 - 4)]dx$$

4. Finalmente la resolvemos.

$$A = \int_{-2}^{2} [(-x^2 + 4) - (x^2 - 4)]dx = \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)dx$$
$$A = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{32}{3}\right] - \left[-\frac{32}{3}\right] = \boldsymbol{\frac{64}{3} u^2}$$

Ejemplo 2.1.7

Encontrar el área comprendida por la función $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ en el intervalo de 0 a 1.

1. En este caso ya nos dan los valores de a y b por lo tanto es más sencillo y nos ahorramos este paso.
2. Graficamos las dos funciones.

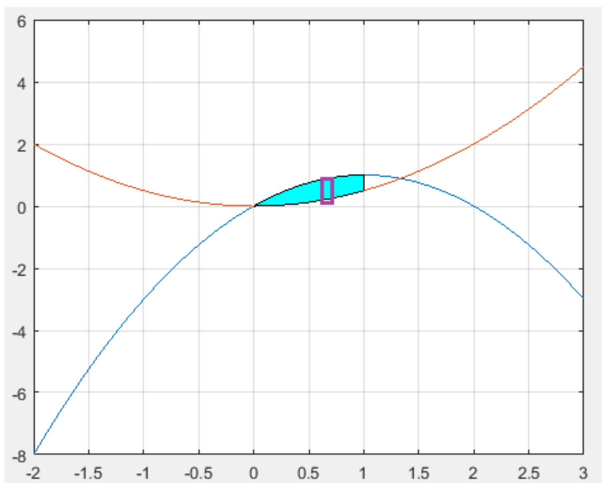


Figura 2.16 Rectángulo representativo

De nueva forma nos conviene usar rectángulos verticales.

3. Posteriormente planteamos nuestra integral.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_0^1 \left[(2x - x^2) - (\frac{x^2}{2})\right] dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{3}{2}x^2\right) dx$$

$$A = \left[x^2 - \frac{1}{2}x^3\right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}\right] - [0] = \boldsymbol{\frac{1}{2} u^2}$$

2.2 Volúmenes usando rebanadas

1.- Para secciones transversales de área A(x) perpendiculares al eje x:

$$\boldsymbol{v} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

2.- Para secciones transversales del área A(y) perpendiculares al eje y.

$$\boldsymbol{v} = \int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

Ejemplo 2.2.1

Calcular el volumen de la pirámide con altura h y base rectangular con dimensiones b y 2b.

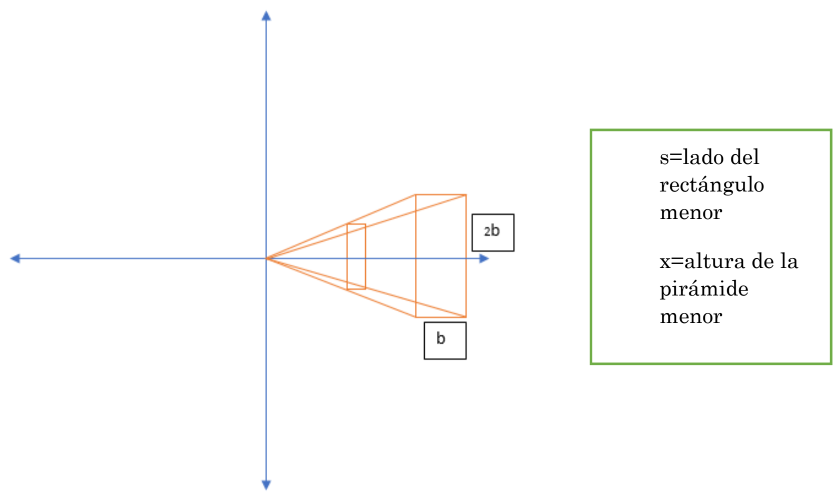


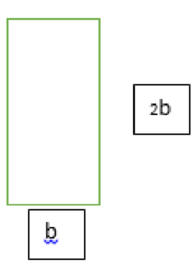
Figura 2.17 Representación gráfica de la pirámide usando el plano cartesiano

$$A = 2b \cdot b = 2b^2$$

$$\frac{x}{h} = \frac{\frac{s}{2}}{b}$$

$$\frac{x}{h} = \frac{s}{2b}$$

$$s = \frac{2b^2x^2}{h^2}$$



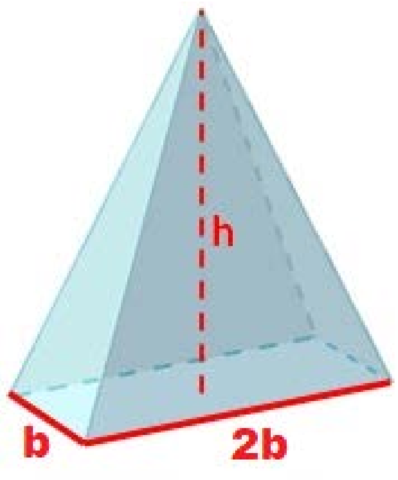
$$V = \int_0^h \frac{2b^2x^3}{h^2}$$

$$\frac{1}{3}\frac{2b^2}{h^2}x^3|_0^h$$

$$V = \frac{1}{3}\frac{2b^2}{h^2} \cdot h^3$$

$$V = \frac{1}{3}2b^2h$$

La fórmula del volumen de la pirámide con altura h y base rectangular con dimensiones b y 2b es:



$$V = \frac{2}{3}b^2h$$

Figura 2.18 Imagen de una pirámide rectangular

Ejemplo 2.2.2

Determine el volumen del sólido cuya base es un disco circular de radio r. Las secciones transversales perpendiculares a la base son cuadradas.

Proceso de solución

Realizando el análisis gráfico del problema tenemos la siguiente figura:

En la que observamos que la mitad del lado de uno de los cuadrados es r cuando analizamos el cuadrado mayor que pasa por el eje X. Si observamos el cuadrado menor observamos que su lado mide dos veces el valor de x en esa coordenada.

Por lo que concluimos que el área de la superficie cuadrangular es:

$$S = (2x)^2 = 4x^2$$

De modo que esa es nuestra función a integrar, en los rangos de 0 a r. Por lo que la integral queda como sigue:

$V = 4\int_0^r x^2 dx$

Ya integrada la función tenemos:

$$V = \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^r$$

Realizando la evaluación obtenemos finalmente que:

$$\boldsymbol{V = \frac{4r^3}{3}}$$

Ejemplo 2.2.3

Demostrar que el volumen de una pirámide cuadrada de altura h y base con lado L *es* $\mathrm{V} = \frac{1}{3}\mathrm{Bh}$

Proceso de solución

Analizando la siguiente imagen tenemos:

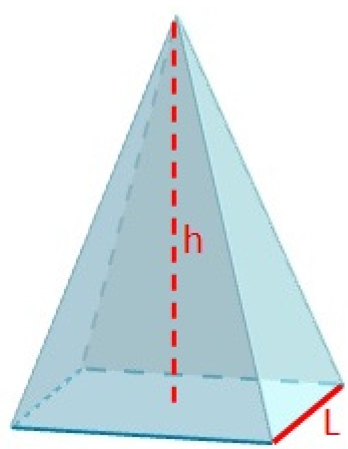


Figura 2.19

Que existen dos pirámides, una más pequeña que la original. De la pirámide pequeña tomamos una superficie semejante S y realizando la igualdad entre las dos razones obtenemos:

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2}$$

Reduciendo los términos:

$$\frac{x}{h} = \frac{s}{L}$$

Despejando la superficie s que es la superficie que nos interesa integrar:

$$s = \frac{xL}{h}$$

Elevamos todo al cuadrado, ya que es el área del cuadrado:

$$s^2 = \frac{x^2L^2}{h^2}$$

Ahora procedemos a integrar el área obtenida en un rango de 0 a h, donde L y h son constantes:

$$V = \int_0^h \frac{x^2L^2}{h^2} dx$$

$$V = \frac{L^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx$$

$$V = \left[\frac{L^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}x^3\right]_0^h$$

Finalmente evaluando:

$$V = \frac{L^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}h^3$$

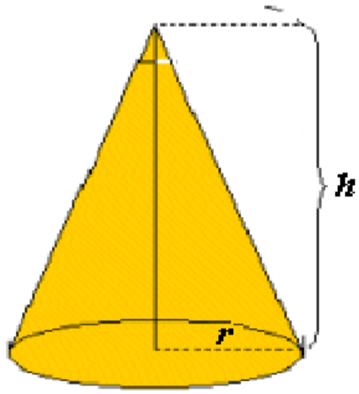
$$\boldsymbol{V = \frac{L^2h}{3}}$$

Ejemplo 2.2.4

Demostrar que el volumen de un cono de altura h y radio máximo r es de $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Proceso de solución

Analizando la siguiente imagen tenemos:



Que existen dos conos, uno más pequeño que el original. Del cono pequeño tomamos una superficie semejante S y realizando igualación de razones obtenemos:

$$\frac{x}{h} = \frac{s}{r}$$

Despejando el radio r que es la variable que nos interesa integrar:

$$r = \frac{xs}{h}$$

Elevamos todo al cuadrado, ya que es el radio al cuadrado lo que se va a integrar:

$$r^2 = \frac{x^2 s^2}{h^2}$$

Ahora procedemos a integrar el área obtenida en un rango de 0 a h, donde r y h son constantes:

$$V = \int_0^h \frac{x^2 r^2 \pi}{h^2} dx$$

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \left[\frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} x^3\right]_0^h$$

Finalmente evaluando:

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3$$

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

2.3 Volúmenes de sólidos de revolución

Un sólido de revolución es una figura obtenida como consecuencia de hacer rotar una región plana alrededor de una recta cualquiera que esté contenida en el mismo plano. Una superficie de revolución es la superficie exterior de un sólido de revolución, es decir, encierra una porción de espacio dentro de la misma.

Empleando el cálculo integral es posible calcular el volumen de superficies de este tipo.

Veamos a continuación algunos métodos para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

2.3.1 Método de Discos

Este método consiste en hacer rotar la gráfica de nuestra función sobre algún eje para obtener un sólido de revolución que pueda modelarse como la suma de discos. Para obtener el volumen de un disco se multiplica el área del círculo por la altura de este:

$$V = \pi r^2 h$$

En este caso tomaremos el eje x como el eje de rotación, por lo que el radio del círculo está definido por la función en x y la altura será Δx:

$$V = \pi[f(x)]^2 \Delta x$$

Por lo tanto:

$$V = \lim_{h \to \infty} \sum_{h=1}^{\infty} \pi[f(x)]^2 \Delta x$$

Por lo anterior, tendremos dos casos:

a) Si usamos rectángulos verticales:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

b) Si usamos rectángulos horizontales:

$$V = \int_a^b \pi[f(y)]^2 dy$$

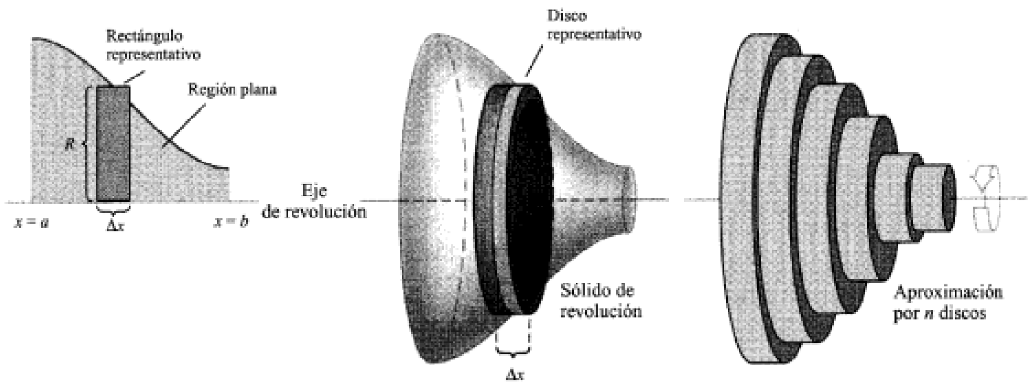


Figura 2.19 De izquierda a derecha se muestra el rectángulo representativo, al hacer girar alrededor del eje x la región plana de dicho rectángulo se determina un disco y en la última figura se muestran varios discos.

Ejemplo 2.3.1.1

Hallar el volumen del solido obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región bajo la curva: $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1.

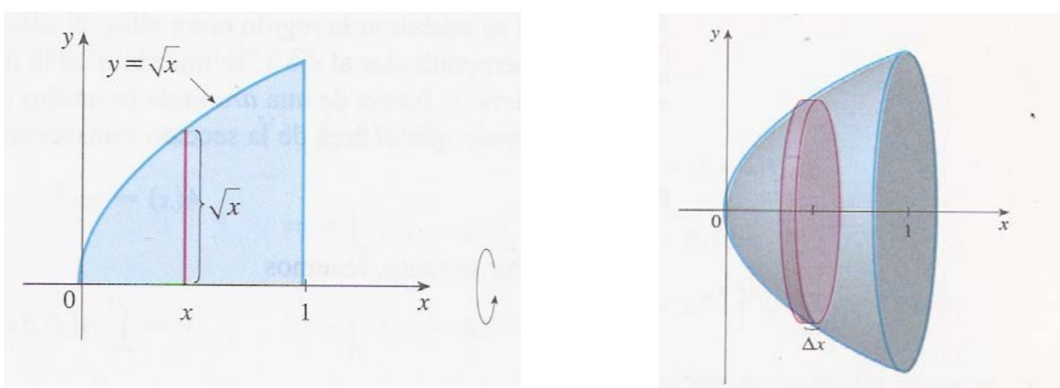


Figura 2.17 En la imagen izquiera se muestra elrectángulo representativo y en la imagen derecha el disco representativo y el sólido de revolución

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 x\,dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi\, u^3}$$

Ejemplo 2.3.1.2

Sea $y = -x + 1$, $x = 1$ & $x = 0$. Formular y evaluar la integral que da el volumen del solido formado al girar la región alrededor del eje x.

1) Lo primero que se tiene que hacer es graficar la función, al hacerlo obtenemos:

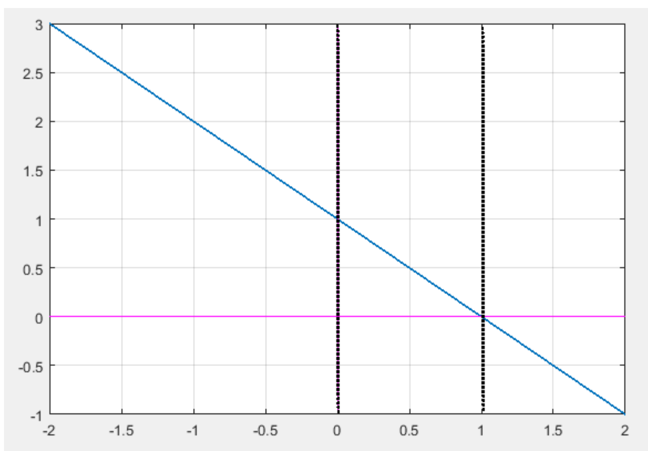


Figura 2.18 Representación gráfica de las funciones

2) Una vez hayamos graficado, podemos ver más fácil los intervalos de la función, por lo que procedemos a sustituir los datos en la función más conveniente, como obtuvimos rectángulos verticales, integraremos respecto a x.

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

$$V = \int_0^1 \pi[-x + 1]^2 dx$$

3) Procedemos a integrar y evaluar.

$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - 2x + 1) dx$$

$$V = \pi[\frac{x^3}{3} - x^2 + x]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

$V = \pi[\frac{1^3}{3} - (1)^2 + 1] = \pi[\frac{1}{3} - 1 + 1]$

$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi u^2}$

Ejemplo 2.3.1.3

Sea $y = x^2, y = 0 \ \& \ y = 4$. Formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje y.

1) Lo primero que se tiene que hacer es graficar la función, al hacerlo obtenemos:

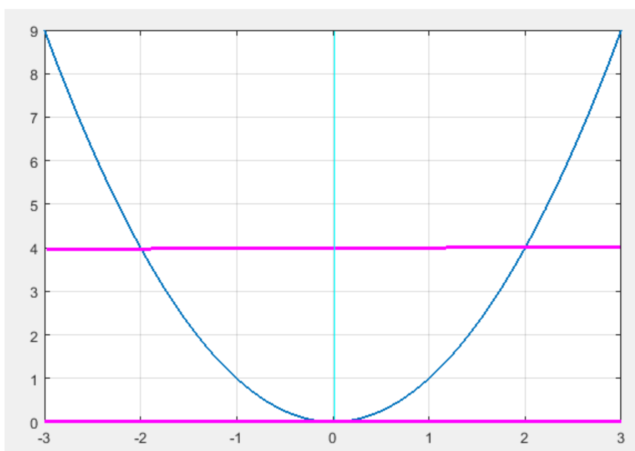


Figura 2.19 Representación gráfica de las funciones

2) Una vez graficado, podemos observar rectángulos horizontales, por lo que integraremos respecto a y, para esto despejaremos x de la función original.

$$y = x^2$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2}$$
$$x = \sqrt{y}$$

3) Procedemos a sustituir los datos en la función.

$$V = \int_a^b \pi[f(y)]^2 dy$$

$$V = \int_0^4 \pi[\sqrt{y}]^2 dy$$

4) Procedemos a integrar y evaluar.

$$V = \int_0^4 \pi(y) dy$$

$V = \pi[\frac{y^2}{2}]_0^4 = \pi\left[\frac{(4)^2}{2}\right]$

$\boldsymbol{V = 8\pi u^2}$

Ejemplo 2.3.1.4

Sean las funciones $x = -y^2 + 4y$ y $y = 1$ & $y = 4$. Formular y evaluar la integral que da el volumen del solido formado al girar la región alrededor del eje y.

1) Lo primero que se tiene que hacer es graficar la función, al hacerlo obtenemos:

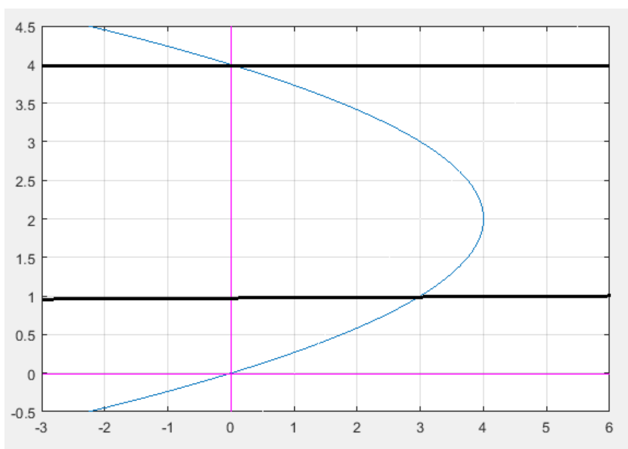


Figura 2.20 Representación gráfica de las funciones

2) Sustituimos los datos en la función mas conveniente, como obtuvimos rectángulos horizontales, integraremos respecto a y.

$$V = \int_a^b \pi[f(y)]^2 dy$$

$$V = \int_1^4 \pi[-y^2 + 4y]^2 dy$$

3) Procedemos a integrar y evaluar.

$$V = \int_1^4 \pi(y^4 - 8y^3 + 16y^2)dy$$

$$V = \pi[\frac{y^5}{5} - 2y^4 + \frac{16y^3}{3}]\begin{matrix}4\\1\end{matrix}$$

$$V = \pi[\left[\frac{(4)^5}{5} - 2(4)^4 + \frac{16(4)^3}{3}\right] - \left[\frac{(1)^5}{5} - 2(1)^4 + \frac{16(1)^3}{3}\right]]$$

$$V = \pi[\left[\frac{512}{15}\right] - \left[\frac{53}{15}\right]] = \pi[\frac{459}{15}]$$

$$\boldsymbol{V = \frac{153}{5}\pi u^2}$$

Ejemplo 2.3.1.5

Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor OX del área limitada por y = 6 − x, y = 0, x = 0, x = 4.

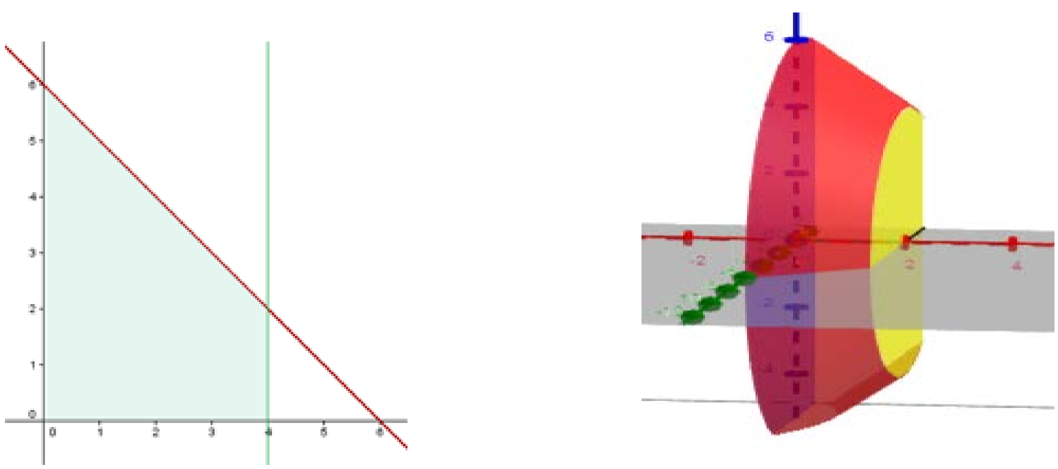


Figura 2.21 Representación gráfica de las funciones y del sólido

$$V = \pi\int_a^b [f(x)^2]dx$$

$$V = \pi\int_0^4 [(6-x)^2]dx$$

$$V = \pi\int_0^4 36 - 12x + x^2 dx$$

$$V = \pi[\ 36x - 6x^2 + \frac{x^3}{3}]\ _0^4$$

$$V = \pi\{\ 36(4) - 6(4)^2 + \frac{(4)^3}{3} - \left[\ 36(0) - 6(0)^2 + \frac{(0)^3}{3}\right]\}$$

$$V = \frac{208}{3}\pi u^3$$

2.3.2 Método de Arandelas

Se utiliza este método cuando se trata de calcular el volumen de un sólido de revolución con un agujero. Este tipo de sólidos aparecen cuando la región plana que gira y el eje de revolución no están juntos.

1. Si se gira esta región alrededor del eje x entonces el volumen del solido resultante es:

$$Vf(x) = \int_a^b \pi[Re^2 - Ri^2]dx$$

Donde:

$$Re = Radio\ del\ disco\ mayor\ o\ el\ externo \rightarrow f(x)$$

$$Ri = Radio\ del\ disco\ menor\ o\ el\ interno \rightarrow g(x)$$

2. Sí se gira esta región alrededor del eje y entonces el volumen del solido resultante es:

$$Vf(y) = \int_a^b \pi[Re^2 - Ri^2]dy$$

Donde:

$$Re = Radio\ del\ disco\ mayor\ o\ el\ externo \rightarrow f(x)$$

$$Ri = Radio\ del\ disco\ menor\ o\ el\ interno \rightarrow g(x)$$

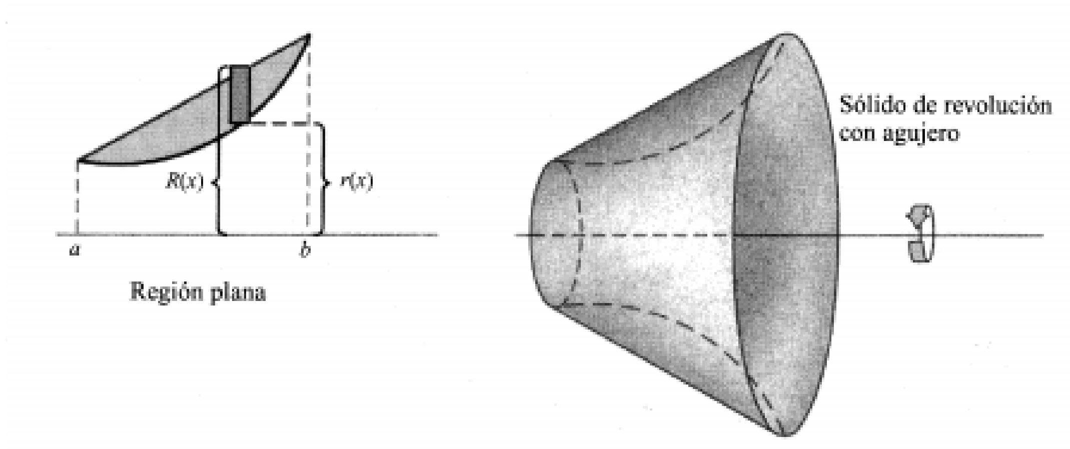


Figura 2.22 Método de arandelas para el cálculo de volúmenes.

Ejemplo 2.3.2.1

Sean las funciones $y=x^2$ y $y=x$, determine el volumen del sólido de revolución que se forma al girar el área comprendida entre ambas funciones, alrededor del eje X

Proceso de solución.

Se realiza en el plano cartesiano el trazo de las dos funciones, una vez hecho esto, giramos las dos funciones alrededor de la función dada (en este caso es el eje X), procedemos a ver si lo haremos con rectángulos verticales u horizontales, en donde aplicaremos alguna de las siguientes fórmulas según sea el caso.

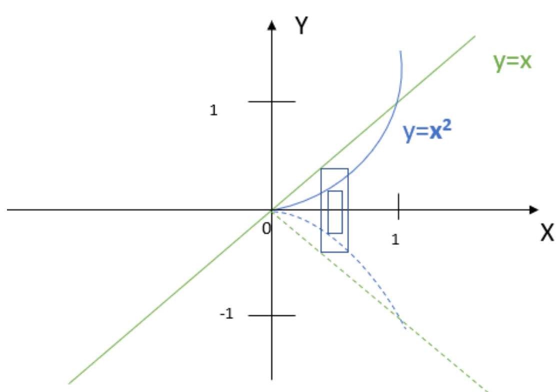


Figura 2.23 Representación gráfica de las funciones

$V = \int_b^a \pi[(f(x))^2 - \left(g(x)\right)^2]dx$ Si son rectángulos verticales

$V = \int_b^a \pi[(f(y))^2 - \left(g(y)\right)^2]dy$ Si son rectángulos horizontales

En donde f(x) es el Radio externo y g(x) el radio interno.

Definimos cual de nuestras dos funciones será el radio externo y cual el radio interno.

$r_E=x$; $r_E^2=x^2$

$r_I=x^2$; $r_I^2=x^4$

Sustituimos

$$V = \int_0^1 \pi[x^2 - x^4]dx$$

Resolvemos la integral definida.

$V = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right] |_0^1$

Evaluamos en los puntos que ambas funciones se tocan dando por resultado

$V=\pi\left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5}\right] = \frac{2}{15}\pi\, u^3$

Ejemplo 2.3.2.2

Sean las funciones $y=x^2$ y $y=x$, determine el volumen de los sólidos de revolución que se forman al girar el área comprendida entre ambas funciones, alrededor del x=1.
Solución.

Se grafican en el plano cartesiano las dos funciones, una vez hecho esto, giramos el área comprendida entre la parábola y la recta alrededor de la función dada (en este caso en x=1), procedemos a ver si lo haremos con rectángulos verticales u horizontales, en donde aplicaremos alguna de las fórmulas ya mencionadas anteriormente.

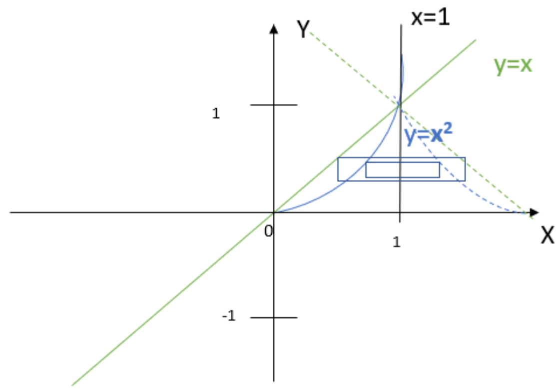


Figura 2.23 Representación gráfica de las funciones

Para este caso utilizaremos la fórmula para rectángulos horizontales.

$$V = \int_b^a \pi[(f(y))^2 - \left(g(y)\right)^2]dy$$

Por lo que procederemos a definir el radio externo y el radio interno pero esta vez en función de y.

$$r_I = 1 - \sqrt{y}\,;\ {r_I}^2 = (1 - \sqrt{y})^2 = 1 - 2\sqrt{y} + y$$

$$r_E = 1 - \mathrm{y}\,;\ {r_E}^2 = (1 - \mathrm{y})^2 = 1 - 2y + y^2$$

Procedemos a sustituir en la fórmula:

$$V = \int_0^1 \pi[1 - 2y + y^2 - (1 - 2\sqrt{y} + y)]dy$$

Reducimos términos:

$$V = \int_0^1 \pi[-3y + y^2 + 2\sqrt{y}]dy$$

Resolvemos la Integral Definida:

$V = \pi\left[\frac{-3y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right] \mid_0^1$

Evaluamos en los puntos que ambas funciones se tocan. Y nuestro resultado será:

$$V = \pi\left[\frac{-3(1)^2}{2} + \frac{1^3}{3} + \frac{4}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{6}\pi\, u^3$$

Ejemplo 2.3.2.3

Sean las funciones $y^2=x$ y $x=2y$, determine el volumen de los sólidos de revolución que se forman al girar el área comprendida entre ambas funciones, alrededor del eje X.

Solución

Se trazan en el plano cartesiano las dos funciones, una vez hecho esto, giramos el área comprendida entre la recta y la parábola alrededor de la función dada (en este caso en el eje x), procedemos a ver si lo haremos con rectángulos verticales u horizontales, en donde aplicaremos alguna de las fórmulas ya mencionadas anteriormente.

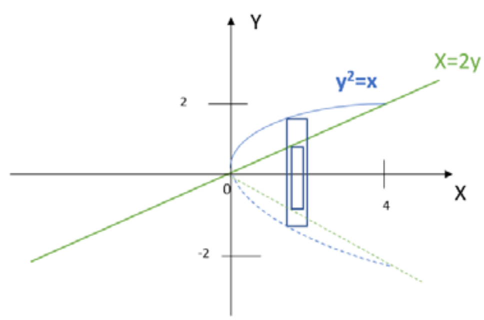


Figura 2.24 Representación gráfica de las funciones

Para este caso utilizaremos la fórmula para rectángulos verticales.

$$V = \int_b^a \pi[(f(x))^2 - \left(g(x)\right)^2]dx$$

Por lo que procederemos a definir el radio externo y el radio interno pero esta vez en función de x.

$$r_E = \sqrt{x} \, ; \, {r_E}^2 = \mathrm{x}$$

$$r_I = \frac{\mathrm{x}}{2} \, ; \, {r_I}^2 = \frac{x^2}{4}$$

Sustituimos en la Integral

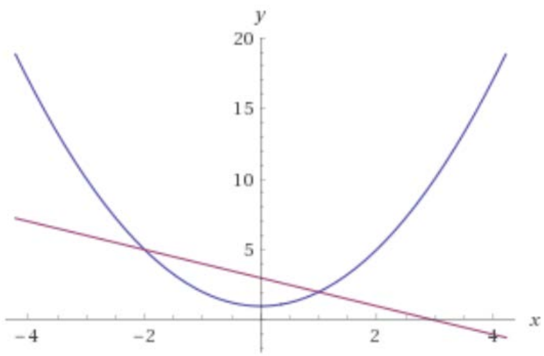
$$V = \int_0^4 \pi[x - \frac{x^2}{4}]dx$$

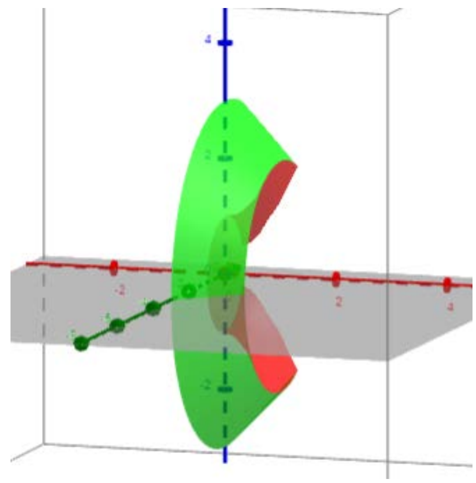
Procedemos a resolver la Integral Definida y nos da como resultado:

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right] \Big|_0^4 = \frac{8}{3}\,\pi\, u^3$$

Ejemplo 2.3.2.4

Encontrar la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = -x + 3$ que gira alrededor del eje x para generar el sólido.





$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2)]dx$$

Igualamos las funciones y resolvemos la ecuación para conocer los límites de integración:

$x^2 + 1 = -x + 3 \longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$

Limitas de integración: -2 y 1.

Decimos que: $g(x) = x^2 + 1 \quad f(x) = -x + 3$

Partiendo de esto sustituimos los valores para calcular el volumen:

$$V = \pi \int_{-2}^{1} [(-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2)]dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^{1} [8 - 6x - x^2 - x^4]dx$$

$$V = \pi[\, 8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]\ {}_{-2}^{1}$$

$$V = \pi\{\, 8(1) - 3(1)^2 - \frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^5}{5} - \left[\, 8(-2) - 3(-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^5}{5}\right]\}$$

$$V = \frac{117}{5}\pi u^3$$

2.3.3 Método de envolventes cilíndricas o capas

Consideremos la región plana determinada por la gráfica de una función $f(x)$, y las rectas $x = a, x = b$.

El volumen del solido de revolución obtenido al girar dicha región alrededor de un eje vertical $x = x_0$ viene dado por:

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Donde:

$$x = Radio$$

$$f(x) = Altura$$

$$dx = Espesor$$

Si consideramos la región plana determinada por la gráfica de una función $f(y)$, y las rectas $y = a, y = b$.

El volumen del solido de revolución obtenido al girar dicha región alrededor de un eje horizontal $y = y_0$ viene dado por

$$\int_a^b 2\pi y f(y) dy$$

Donde:

$$y = Radio$$

$$f(y) = Altura$$

$$dy = Espesor$$

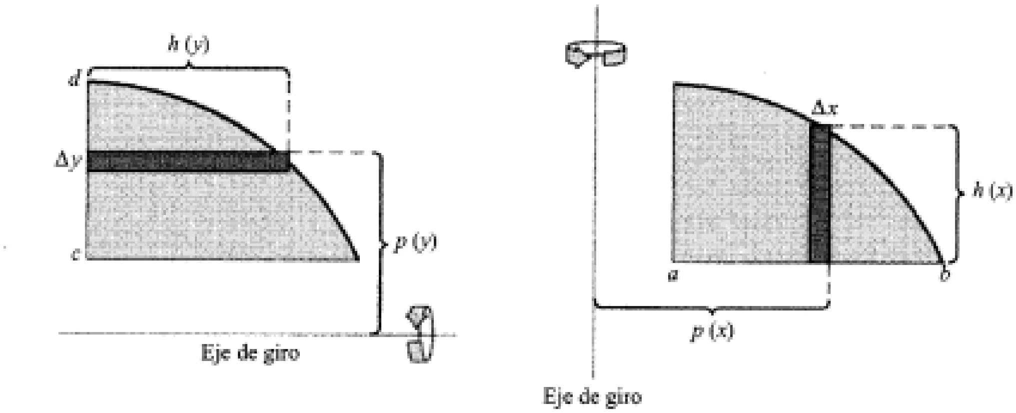


Figura 3. Método de envolventes cilíndricas para el cálculo de volúmenes.

Ejemplo 2.3.3.1

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por $y = x - x^3$ y el eje x $(0 \leq x \leq 1)$ alrededor del eje y.

$x - x^3 = 0$

$x(1 - x^2) = 0$

$x_1 = 0\ ;\ x_2 = 1\ ;\ x_3 = -1$

$$V = 2\pi \int_{-1}^{1} x(x - x^3)dx$$

$$V = 2\pi \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]$$

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{15}\pi u^3}$$

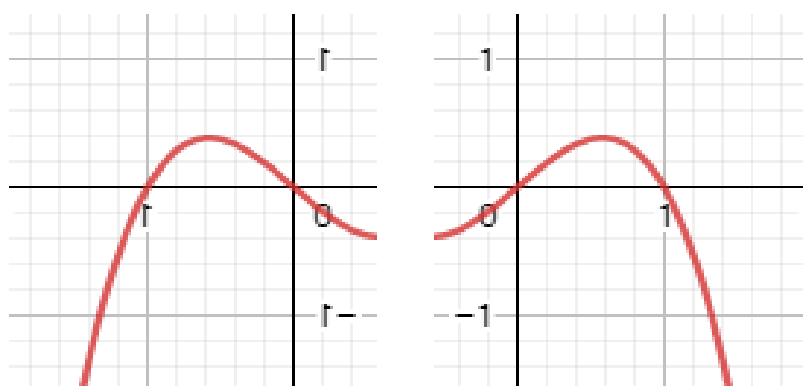


Figura 2.25 Representación gráfica de la función

Ejemplo 2.3.3.2 La región acotada por la gráfica de $y = 2x - x^2$ alrededor del eje y¸ calcule el volumen del sólido resultante.

$$V = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2)dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]$$

$$\boldsymbol{V = \frac{8}{3}\pi u^3}$$

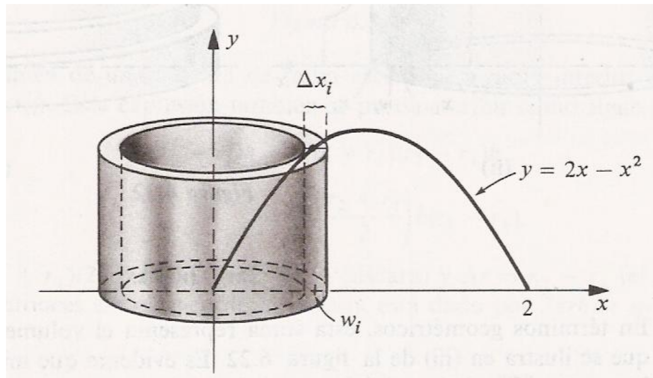


Figura 2.26 Representación gráfica de la función

Ejemplo 2.3.3.3

Hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar sobre el eje "y" y la región que está comprendida, en el primer cuadrante, entre la curva

$y = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ y la vertical x = 3.

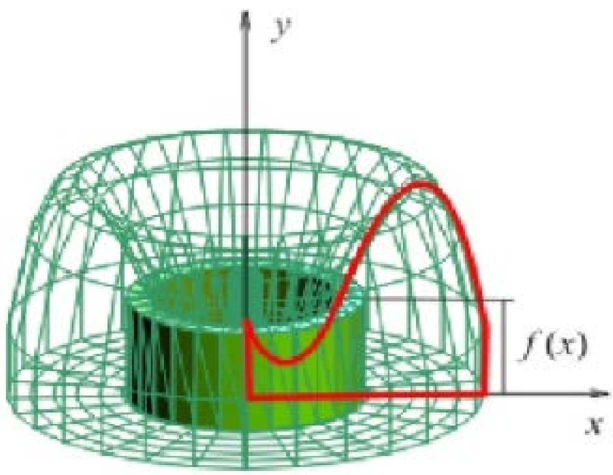


Figura 2.28 Representación gráfica de la envolvente

$$V = 2\pi \int_0^3 x(-x^3 + 4x^2 - 3x + 1)dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 (-x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x)dx$$

$$V = 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^3$$

$$\boldsymbol{V = \frac{99}{5} \pi \, u^3}$$

Ejemplo 2.3.3.4

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica $x = e^{-y^2}$ y el eje $y (0 \leq y \geq 1)$ alrededor del eje x.

Porque el eje de revolución es horizontal, usar un rectángulo representativo

horizontal, como se muestra en la figura 2.27. La anchura Δy indica que y es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(y) = y$, y la altura del rectángulo es $h(y) = e^{-y^2}$. Porque y va de 0 a 1, el volumen del sólido es:

$$V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 ye^{-y^2} dy$$

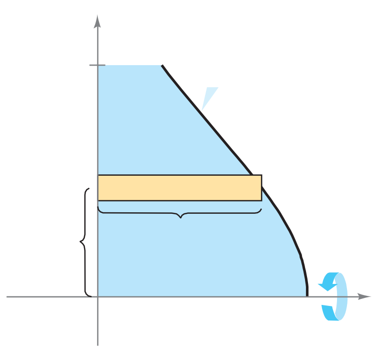


Figura. 2.29 Representación gráfica de la función

2.4 Longitud de arco y área de superficie de revolución

2.4.1 Longitud de arco

Un segmento de curva se dice rectificable si tiene una longitud de arco finita. El problema de determinar la longitud de una curva es muy antiguo (algunas contribuciones ya fueron realizadas por los matemáticos C. Huygens ´ (1629–1695) y J. Gregory (1638–1675)) y no por ello es sencillo. Una condición suficiente para que la gráfica de ´ una función´ f sea rectificable entre los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) es que la derivada f0 sea una función continua ´ en [a, b]. Se dice entonces que la función´ f es continuamente derivable o de clase C1.

La longitud de arco, también llamada rectificación de una curva es la medida de la distancia o camino recorrido a lo largo de una curva o dimensión líneal.

Si y=f(x) tiene derivada *f´* continua en [a,b], la Longitud de arco de ***f´*** entre a y b está definida por:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x$$

Así mismo, para una curva x=g(y) la longitud de arco de g entre c y d está definida por:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, \mathrm{d}y$$

Ejemplo 2.4.1

Halle la longitud del arco de la parábola semicúbica y^2 x^3 entre los puntos (1, 1) y (4, 8). (Véase la figura 2.30)

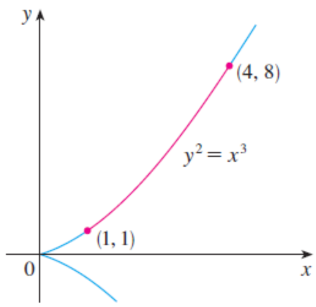


Figura 2.30 Representación gráfica

Proceso de solución

Para la mitad superior de la curva se tiene:

$$y - x^{2/2} \qquad \frac{dx}{dy} = \tfrac{3}{2}x^{1/2}$$

y, por tanto, la fórmula de longitud de arco da

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dx \ = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ dx$$

Si sustituimos u= $1 + \frac{9}{4}x$, entonces du = $\frac{9}{4}\,dx$. Cuando x = 1, u = $\frac{13}{4}$; cuando x = 4, u = 10.

Por tanto,

$$L = \tfrac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9} * \frac{2}{3}u^{3/2}\ ]_{13/4}^{10}$$

$$= \tfrac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{2}\right)^{3/2}\right] = \tfrac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$$

Si una curva tiene la ecuación x = g(y), c ≤ y ≤ d, y g'(y) es continua, entonces al intercambiar los papeles de *x* y *y* en la fórmula 2 o en la ecuación 3, se obtiene la formula siguiente para su longitud:

Ejemplo 2.4.2

Encuentre la longitud del arco de la parábola $y^2 = x$ *de (0, 0) a (1, 1).*

Proceso de solución

Puesto que x = y^2, se tiene dx/dy = 2y, y la formula 4 da

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1+4y^2}\, dy$$

Hacemos la sustitución trigonométrica y = 1/2 tan θ, que da dy = 1/2 $\sec^2$ θ dθ y $\sqrt{1+4y^2}\ dy = \sqrt{1+tan^2\theta} = sec\,\theta$. Cuando y = 0, por tanto, θ = 0; Cuando y = 1, tan θ = 2, así que θ = $\tan^{-1}$ 2 = α, por ejemplo. Así,

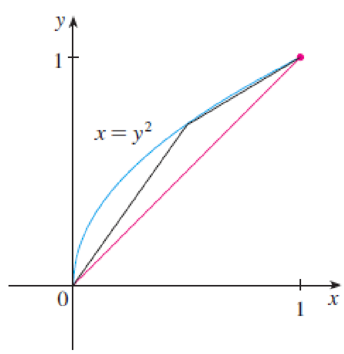
$$L = \int_0^{\propto} \sec\theta * \frac{1}{2} sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\propto} sec^3\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \text{In}\,|\sec\theta + \tan\theta\,|\right]_0^{\propto}$$

$$= \frac{1}{4}(\sec\propto\tan\propto\ + ln\ |\sec\propto\ + \tan\propto|)$$

(Podríamos haber usado la siguiente formula) Puesto que tan α = 2, se tiene que $\sec^2$ α = 1 + $\tan^2$ α = 5, de modo que sec α = $\sqrt{5}$ y

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5}+2)}{4}$$



n	L_n
1	1.414
2	1.445
4	1.464
8	1.472
16	1.476
32	1.478
64	1.479

Figura 2.31 Representación gráfica y tabular

Debido a la presencia del signo raíz cuadrada en las formulas 2 y 4, el cálculo de una longitud de arco a menudo conduce a una integral que es muy difícil o incluso imposible de evaluar de manera explícita. Así, algunas veces nos tenemos que conformar con hallar una aproximación de la longitud de una curva, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.3

a) Plantee una integral para la longitud del arco de la hipérbola xy = 1 del punto (1, 1) al punto (2, 1/2).

b) Use la regla de Simpson con n = 10 para estimar la longitud de arco.

Proceso de solución

a) Se tiene

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

y, por tanto, la longitud de arco es

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\, dx$$

b) Por medio de la regla de Simpson con a = 1, b = 2, n = 10, $\Delta x = 0.1$ y f(x) = $\sqrt{1+1/x^4}$, tenemos

$$L = \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}\,[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)] \approx 1.1321$$

2.4.2 Áreas de superficie de revolución

Una superficie de revolución se forma cuando se hace girar una curva en torno a una recta. Tal superficie es la frontera lateral de un sólido de revolución del tipo analizado en las secciones previamente.

Se desea definir el área de una superficie de revolución de tal manera que corresponda con nuestra intuición. Si el área de la superficie es A, podemos imaginar que pintar la superficie requeriría la misma cantidad de pintura que una región plana con área A.

Comencemos con algunas superficies simples. El área superficial lateral de un cilindro circular con radio r y altura h se toma como A = 2 πrh porque puede imaginarse como si se cortara el cilindro para después desenrollarlo (como en la figura 2.31) para obtener un rectángulo con dimensiones 2πrh y h.

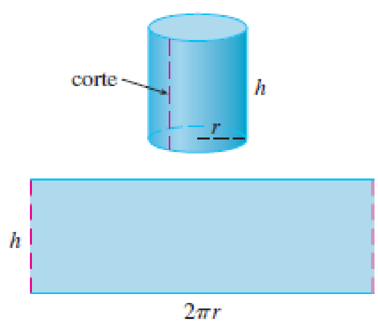


Figura 2.32

De igual manera, podemos tomar un cono circular con base de radio r y de altura inclinada l, cortarlo a lo largo de la línea discontinua en la figura 2, y aplanarlo para formar un sector de un circulo con radio l y Angulo central θ = 2πr / l. Sabemos que, en general, el área de un sector de un circulo con radio l y Angulo θ es 1/2 l² θ y, por tanto, en este caso es

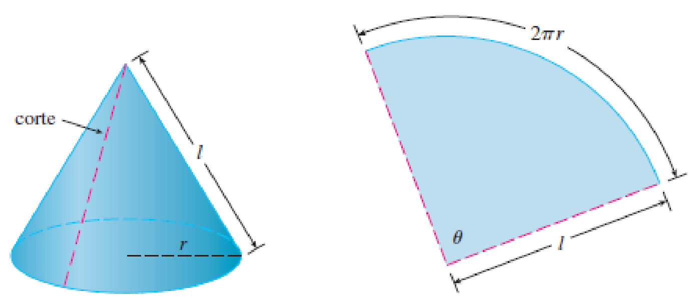


Figura 2.33

$$A = \frac{1}{2}l^2\,\theta = \frac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi r l$$

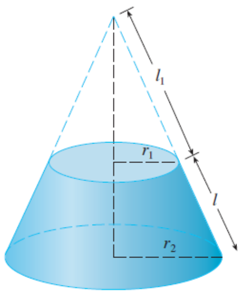


Figura 2.34

Por ende, definimos el área de la superficie lateral de un cono como A πrl.

¿Qué hay acerca de las superficies de revolución más complicadas? Si se sigue la estrategia que se usó con la longitud de arco, podemos aproximar la curva original mediante un polígono. Cuando este se hace girar en torno a un eje, crea una superficie más simple cuya área superficial se aproxima al área superficial real. Si se toma un límite, podemos determinar el área superficial exacta.

Entonces, la superficie de aproximación consta de varias bandas, cada una formada al hacer girar un segmento de recta en torno a un eje. Para hallar el área superficial, cada una de estas bandas puede ser considerada la porción de un cono circular, como se muestra en la figura 2.34. El área de la banda (o cono truncado) con una altura inclinada l y radios superior e inferior r1 y r2, respectivamente, se encuentra al restar las áreas de los dos conos:

$$A = \pi\, r_2\,(l_1 + l) - \pi\, r_1\, l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2]$$

Considerando los triángulos semejantes se tiene

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + 1}{r_2}$$

Que da

$$r_2 l_1 = r_1\, l_1 + r_1\, l \quad o\ bien \quad (r_2 - r_1)l_1 = r_1\, l$$

Si se sustituye esto en la ecuación 1, se obtiene

$$A = \pi(r_1 l + r_2 l)$$

O bien

$$A = 2\pi rl$$

Donde r ½(r1 + r2) es el radio promedio de la banda.

Ahora aplicaremos esta fórmula a nuestra estrategia. Consideremos la superficie mostrada en la figura 4, que se obtiene al hacer girar la curva y = f (x), a ≤ x ≤ b, en torno al eje x, donde f es positiva y tiene una derivada continua. A fin de definir su área superficial, dividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos con puntos extremos x0, x1, . . . , xn e igual ancho Δx, como se hizo para determinar la longitud de arco. Si $y_i = f(x_i)$, entonces el punto $P_i(xi, yi)$ está sobre la curva. La porción de la superficie entre x_{i-1} y x_i se aproxima al tomar el segmento de recta $P_{i-1}\ P_i$, y hacerlo girar en torno al eje x. El resultado es una banda con altura inclinada l = $|P_{i-1}\ P_i|$ y radio promedio r = ½($y_{i-1}\ y_i$) de modo que, por la formula 2, su área superficial es

$$2\pi\ \frac{y_{i-1} +\ y_i}{2}\ |P_{i-1}\ P_i|$$

Como en la demostración del teorema tenemos

$$|P_{i-1}\ P_i| =\ \sqrt{1 +\ [f'(x_i^*)]^2}\ \Delta x$$

Donde xi* es algún numero en $[x_{i-1}, x_i]$. Cuando Δx es pequeño, tenemos yi = f (xi) ≈ f (xi*) y también $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ ≈ f (xi*), puesto que f es continua. Por tanto,

$$\sum_{i-1}^{n} 2\pi\ f(x_i^*)\ \ \sqrt{1 +\ [f'(x_i^*)]^2}\ \Delta x$$

Esta aproximación al parecer mejora cuando n l y, reconociendo a 3 como una suma de Riemann, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ f(x_i^*)\ \ \sqrt{1 +\ [f'(x_i^*)]^2}\ \Delta x = \int_a^b 2\pi\ f(x) \sqrt{1 +\ [f'(x_i^*)]^2}\ dx$$

Por tanto, en el caso donde f es positiva y tiene una derivada continua, el área superficial de la superficie obtenida se define al hacer girar la curva y f (x), a x b, en torno al eje x como

$$S =\ \int_a^b 2\pi\ f(x) \sqrt{1 +\ [f'(x_i^*)]^2}\ dx$$

Con la notación de Leibniz para derivadas, esta fórmula se convierte en

$$S =\ \int_a^b 2\pi y\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ \ dx$$

Si la curva se describe como x = g(y), c ≤ y ≤ d, entonces la fórmula para el área superficial se transforma en

$$S =\ \int_a^b 2\pi y\ \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ \ dy$$

y ambas fórmulas 5 y 6 pueden resumirse simbólicamente, utilizando la notación para la longitud de arco dada en la sección anterior, como

$$S = \int 2\pi\, y\, ds$$

Para la rotación en torno al eje y, la fórmula del arrea superficial se convierte en

$$S = \int 2\pi\, x\, ds$$

Donde, como antes, puede usarse

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx \quad o\ bien\ ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

Estas fórmulas pueden recordarse si se considera a 2π y o 2π x como la circunferencia de un circulo trazado por el punto (x, y) sobre la curva cuando se hace girar en torno al eje x o al eje y, respectivamente (véase la figura 5).

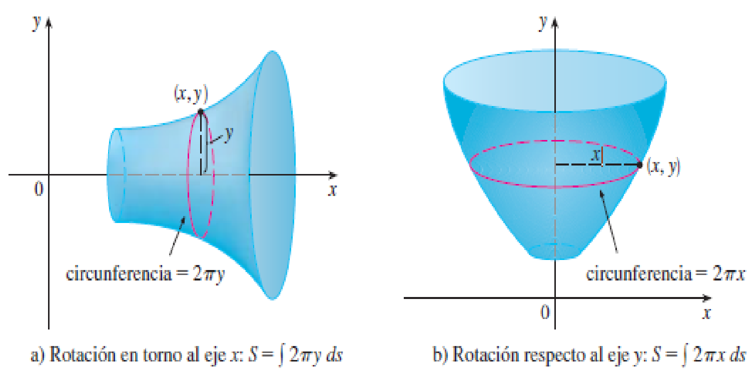


Figura 2.35

La curva $y = \sqrt{4 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$ es un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco en torno al eje x. (La superficie es una porción de una esfera de radio 2. Véase la figura 2.36.)

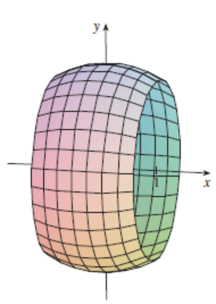


Figura 2.36

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}\ (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Y, por tanto, por la fórmula 5, el área superficial es

$$S = \int_{-1}^{1} 2\pi y\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\ \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\ dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\ \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\ dx$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{1} 1\ dx\ = 4\pi(2) = 8\pi$$

El arco de la parábola $y = x^2$ de (1, 1) a (2, 4) se hace girar en torno al eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.

Utilizando

$$y = x^2 \qquad y \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

Se tiene, de la fórmula,

$$S = \int 2\pi x\ ds$$

$$= \int_{1}^{2} 2\pi x\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$= 2\pi \int_{1}^{2} x\sqrt{1 + 4x^2}\ dx$$

Al sustituir $u = 1 + 4x^2$, se tiene $du = 8x\ dx$. Recuerde que al cambiar los límites de integración, se tiene

$$S = \frac{\pi}{4}\int_{5}^{17} \sqrt{u}\ du\ = \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_{5}^{17}$$

$$= \frac{\pi}{6}\,(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$$

Utilizando

$$x = \sqrt{y} \quad y \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Se tiene

$$S = \int 2\pi x \; dx = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\; dy$$

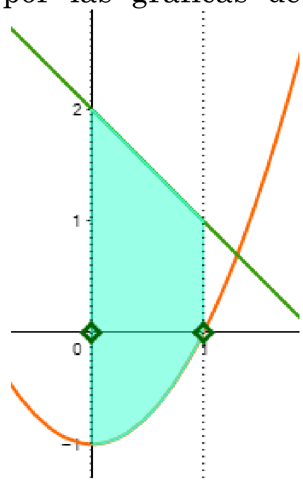
$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\; dy \; = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1}\; dy$$

$$= \frac{\pi}{6}\,(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$$

2.4.3 Ejercicios como apoyo en clase

Áreas

En los ejercicios siguientes trazar la región acotada por las gráficas de las funciones algebraicas y encontrar el área de la región acotada a encontrar.



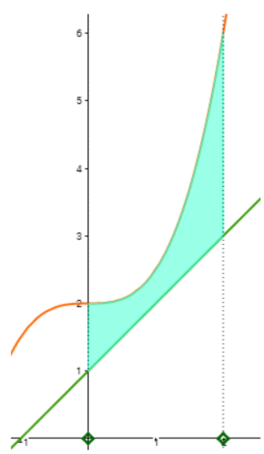
$y = x^2 - 1 \,, y = \; -x + 2 \,, x = 0 \,, x = 1$

$\int_0^1 (-x^2 - x + 3)dx$

$-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x, (0{,}1)$

$\frac{13}{6}\; u^2$

2.- $y = 1/2x^3 + 2 \,,\; y = \; x + 1 \,, x = 0 \,, x = 2$



$\int_0^2 .(\frac{x^3}{2} - x + 1)dx$

$\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{2} + x, (0{,}2)$

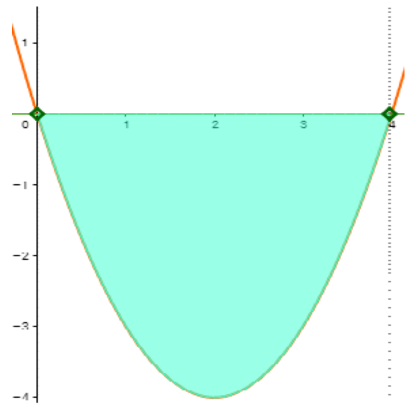
$2\, u^2$

3.- $f(x) = x^2 - 4x\ ,\ g(x) = \ 0$

$\int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx$

$-\frac{x^3}{3} + 2x^2, (0{,}4)$

$\frac{32}{3}\ u^2$

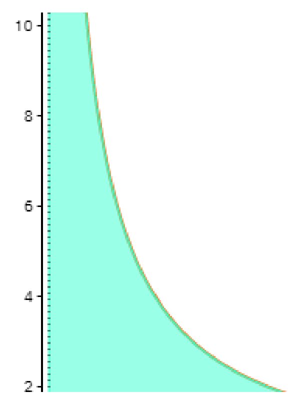


4.- $f(x) = \sqrt{x} + 3\ ,\ g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

$\int_0^{10} (+\sqrt{x} - \frac{1}{2}x)\, dx$

$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{4}, (0{,}10)$

$3.92\ u^2$

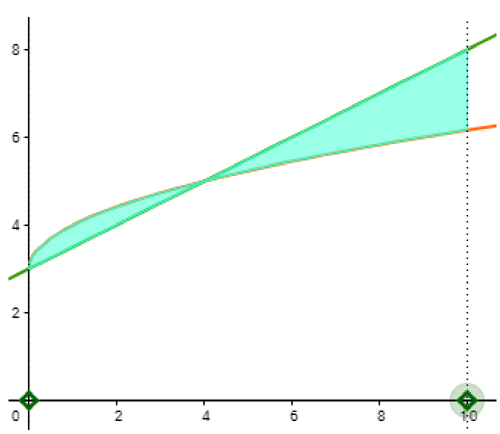


5.- $f(x) = \frac{10}{x}\ ,\ x = 0,\ y = 2,\ y = 10$

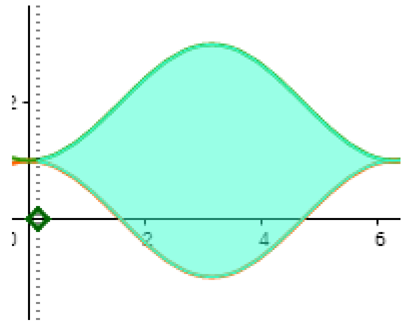
$\int_2^{10} . (\frac{10}{y}) dy$

$10 \ln|x|\ , (2{,}10)$

$16.09\ u^2$



6.- $f(x) = cosx\ ,\ \ g(x) = \ 2 - cosx\ ,\ \ 0 \leq x \leq$ π



$\int_{0}^{2\pi}(+2 - 2cosx\ )dx$

$2x - 2sin(x), (0{,}2\pi)$

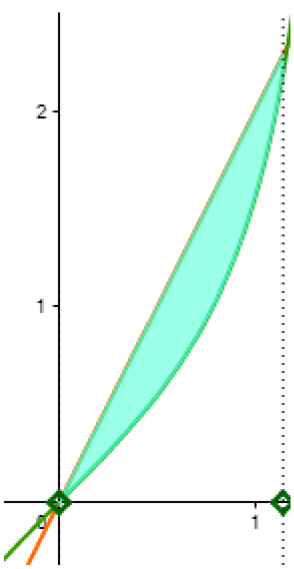
$4\pi\ u^{2}$

7.- $f(x) = 2senx\ ,\ \ g(x) = \ tanx\ ,\ -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

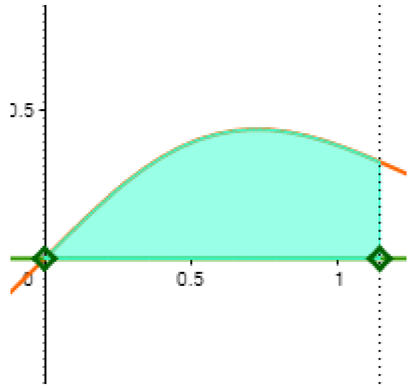
$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}.(\tan(x) - 2senx\ )dx + \ \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}.(2senx - \tan x)dx$

$-ln|cos(x)| + 2cos(x), \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \quad + ln|cos(x)| - 2cos(x), \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

$2 - 2\ln|2|\ u^{2}$



8.- $f(x) = xe^{-x^2}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$

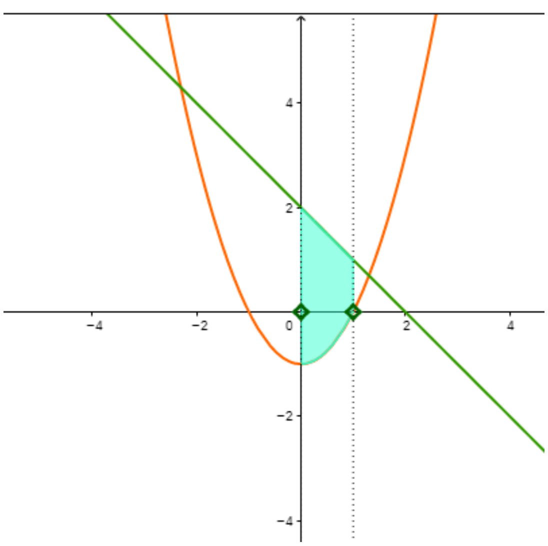


$\int_0^1 .(xe^{-x^2})\,dx$

$-\frac{1}{2}e^{-x^2}, (0,1)$

$0.316\ u^2$

9. $y = x^2 - 1, y = -x + 2, x = 0, x = 1$



$$A = \int_0^1 [(-x^2 + 2) - (x^2 - 1)]dx$$

$$A = \int_0^1 [-x^2 - x + 2)]dx$$

$$A = [-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\ ]\ _0^1$$

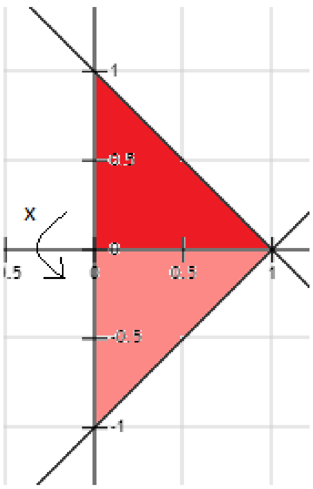
$$A = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2$$

$$A = \frac{7}{6}\ u^2$$

Volúmenes

Formular y evaluar la integral que da el volumen del solido formado al girar la región alrededor del eje x.

1.- $y = -x + 1$

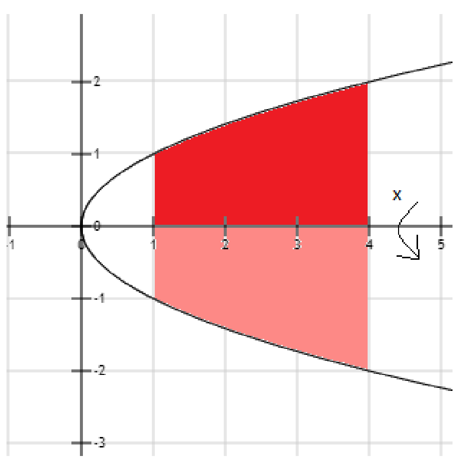


Método de discos

$$V = \pi \int_0^1 (-x + 11)^2 dx \quad => \quad \pi \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \quad =>$$
$$\pi \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)$$

$$Evaluando \quad => \pi \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1\right) = \frac{\pi}{3} U^3$$

2.- $y = \sqrt{x}$

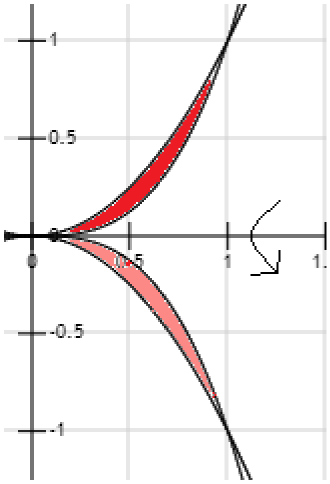


Método de discos

$$V = \pi \int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$Evaluando => \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{15\pi}{2} U^3$$

3.- $y = x^2$, $y = x^3$



Método de arandelas

$Re = x^2 \;=> Re^2 = x^4$

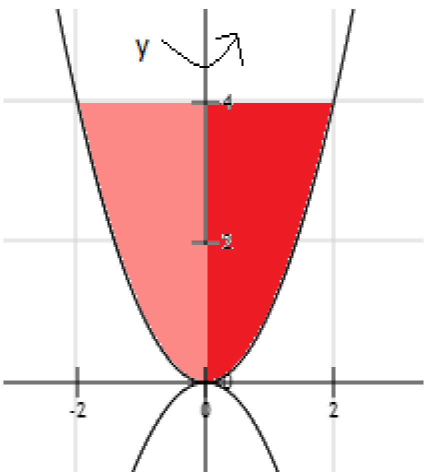
$Ri = x^3 \;=> Ri^2 = x^6$

$V = \pi \int_0^1 (x^4 - x^6)\,dx => \pi(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7})$

$Evaluando => \pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \boldsymbol{\frac{2\pi}{35} U^3}$

Formular y evaluar la integral que da el volumen del solido formado al girar la región alrededor del eje y.

4.- $y = x^2$

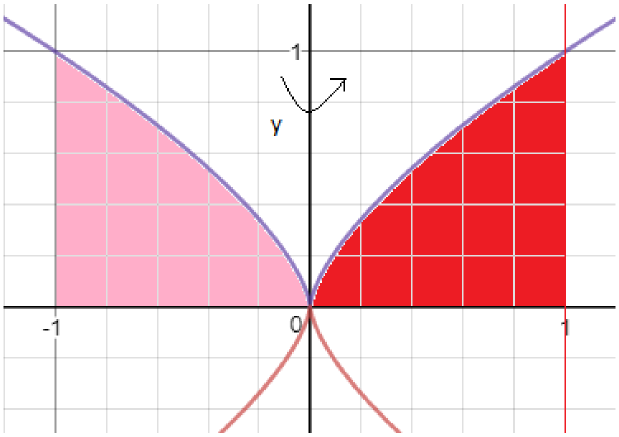


Método de discos

$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy$

$= \pi\left(\frac{y^2}{2}\right)$ $Evaluando =>$ $\boldsymbol{8\pi U^3}$

5- $y = x^{\frac{2}{3}} => x = y^{\frac{3}{2}}$



Método de arandelas

$$Re = 1 => Re^2 = 1$$

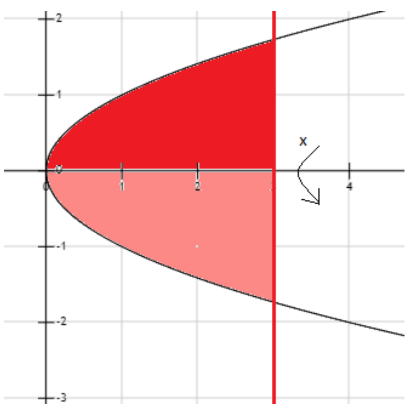
$$Ri = y^{\frac{3}{2}} => Ri^2 = y^3$$

$$V = \pi \int_0^1 (1 - y^3) dy => \ \pi(y - \frac{y^4}{4})$$

$$Evaluando => \frac{3\pi}{4} U^3$$

Encontrar el volumen del solido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de las rectas dadas.

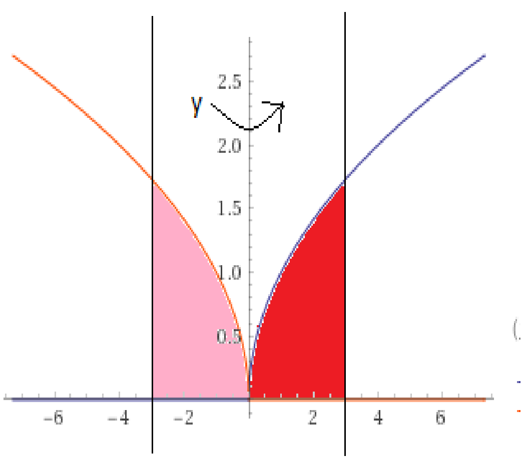
6.- $y = \sqrt{x}$, $y = 0 , x = 3$



a) el eje x

Método de Discos

$$V = \pi \int_0^3 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{9\pi}{2} U^3$$



c) el eje y

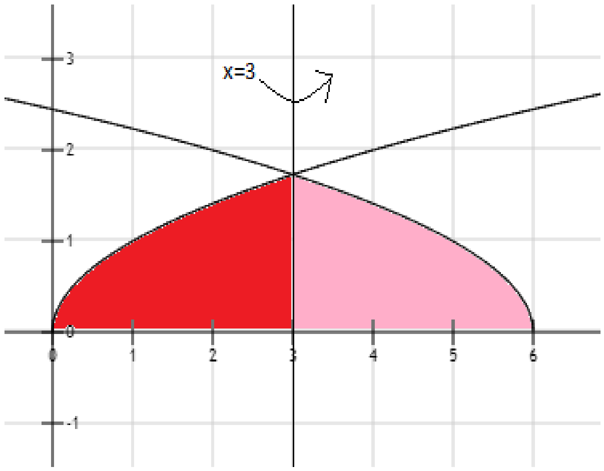
Método de capas

$$V = 2\pi \int_0^3 (3 - x)(\sqrt{x})\, dx$$

$$= 2\pi \ \int_0^3 \left(3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$V = 2\pi \left(2x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right) Evaluando =>$$

$$4\pi \left(3^{\frac{3}{2}} - \frac{3^{\frac{5}{3}}}{5}\right) U^3$$

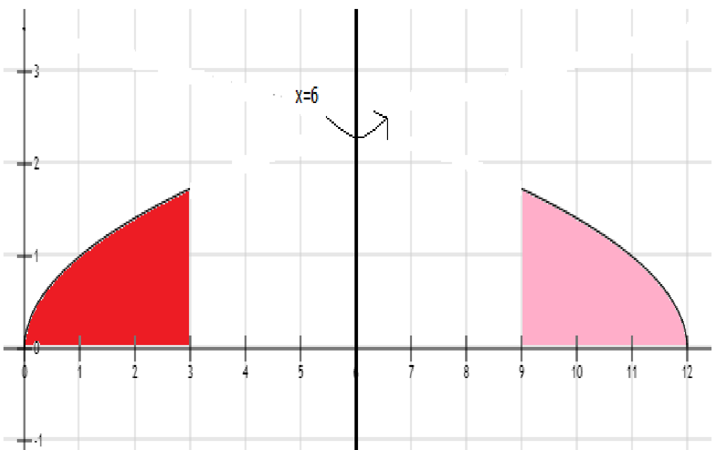


c) la recta x = 3

Método de discos

$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (y^2)^2\, dy \;=>\; \pi\left(\frac{y^5}{5}\right)\; Evaluando =$

$> \boldsymbol{\pi\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{3}\right) U^3}$



d) la recta x = 6

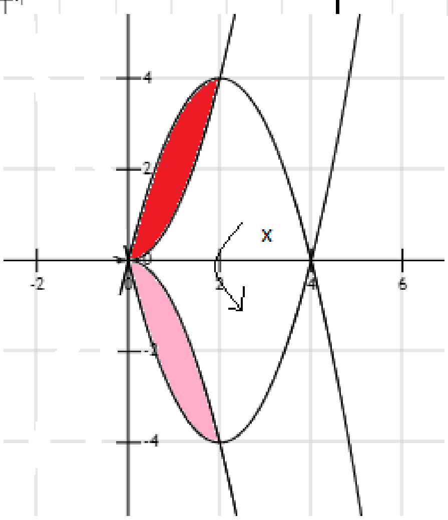
Método de capas

$V = 2\pi \int_0^3 (6 - x)(\sqrt{x})dx \;=>$

$2\pi \int_0^3 (6x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})dx \;=>\; 2\pi(4x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5})$

$Evaluando => \boldsymbol{4\pi\left(2\left(3^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{3^{\frac{5}{2}}}{5}\right)}$

7.- $y = x^2$, $y = 4x - x^2$



a) el eje x

Método de arandelas

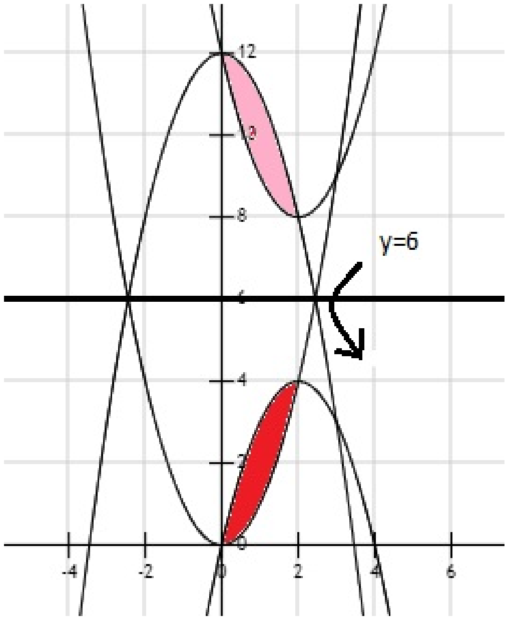
$Re = 4x - x^2 \;=>\; Re^2 = x^4 - 8x^3 + 16x^2$

$Ri = x^2 \;=>\; Ri^2 = x^4$

$$V = \pi \int_0^2 (x^4 - 8x^3 + 16x^2 - x^4)dx$$

$V = \pi\left(-2x^4 + \frac{16x^3}{3}\right) Evaluando => \boldsymbol{\frac{32\pi}{3} U^3}$

b) la recta y = 6



Método de arandelas

$Re = 6 - x^2 \ => Re^2 = x^4 - 12x^2 + 36$

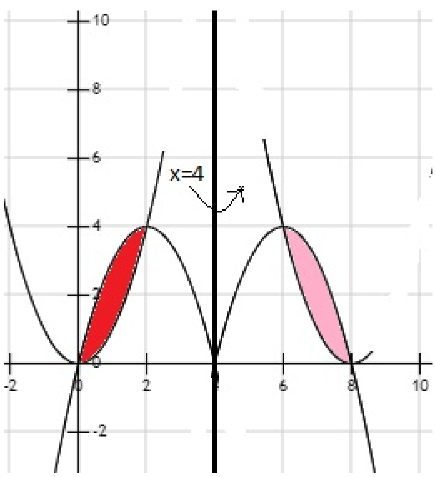
$Ri = 6 - 4x + x^2 \ => Ri^2 = x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 48x + 36$

$V = \pi \int_0^2 (x^4 - 12x^2 + 36 - x^4 + 8x^3 - 28x^2 + 48x - 36)dx$

$V = \pi \int_0^2 (8x^3 - 40x^2 + 48x)dx \ => \ \pi \left(2x^4 - \frac{40x^3}{3} + 24x^2\right) \ Evaluando => \boldsymbol{\frac{64\pi}{3} U^3}$

Usar el método de las capas para encontrar el volumen del solido generado al girar la región plana alrededor de la recta dada.

8.- $Y = x^2, \ Y = 4x - x^2, \ x = 4$



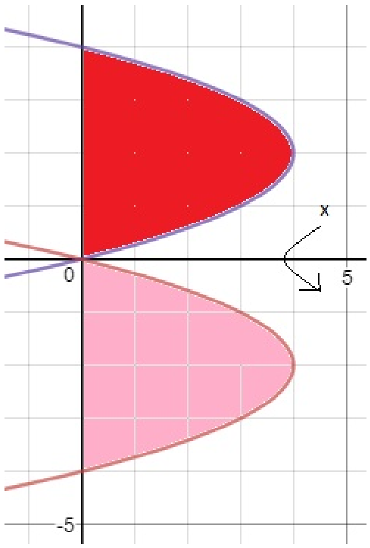
Método de capas

$V = 2\pi \int_0^2 (4 - x)(4x - x^2 - x^2)dx => \ 2\pi \int_0^2 (2x^3 - 12x^2 + 8x^2)dx$

$V = 2\pi \left(\frac{x^4}{2} - 4x^4 + 8x^2\right) Evaluando => \boldsymbol{16\pi U^3}$

Decidir si es más conveniente usar el método de los discos o el método de las capas para encontrar el volumen del solido de revolución. Explicar su razonamiento

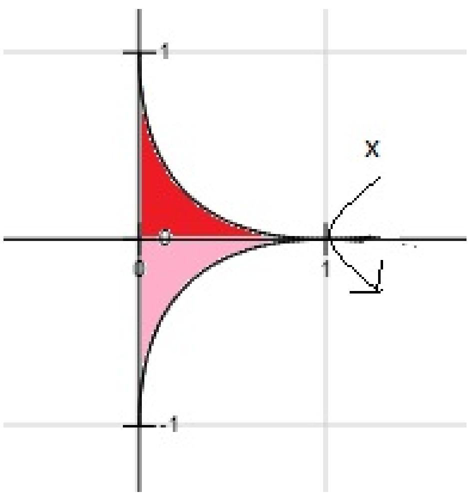
9.- $(y - 2)^2 = 4 - x$ Gira alrededor de x



Para este caso es mejor usar el método de capas debido que con esto solo se resuelve una integral y en el caso de usar el método de discos, se debe tomar en cuenta que, para encontrar el volumen de revolución del área roja, debemos hacer 2 integrales.

Usar el método de discos o capas para encontrar el volumen del solido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor de cada recta dada.

10.- $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\ \ =>\ \ y=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2\ =>\ \ y=x-2\sqrt{a}\sqrt{x}+a$



a) el eje x

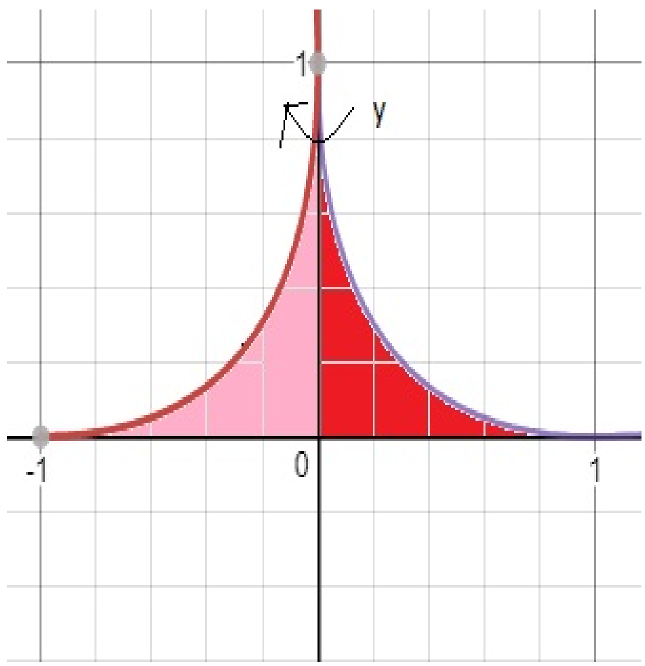
Método de discos

$V=\pi\int_0^a\left(x-2\sqrt{a}\sqrt{x}+a\right)^2dx$

$V=\pi\int_0^a(x^2-4\sqrt{a}x^{\left(\frac{3}{2}\right)}+6ax-4a^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}+a^2)dx$

$V=\pi(\frac{x^3}{3}-\frac{8a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5}+3ax^2-\frac{8a^{\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}}}{3}+a^2x)$

$Evaluando=>\frac{\boldsymbol{a^3\pi}}{\mathbf{15}}\boldsymbol{U^3}$



b) el eje y

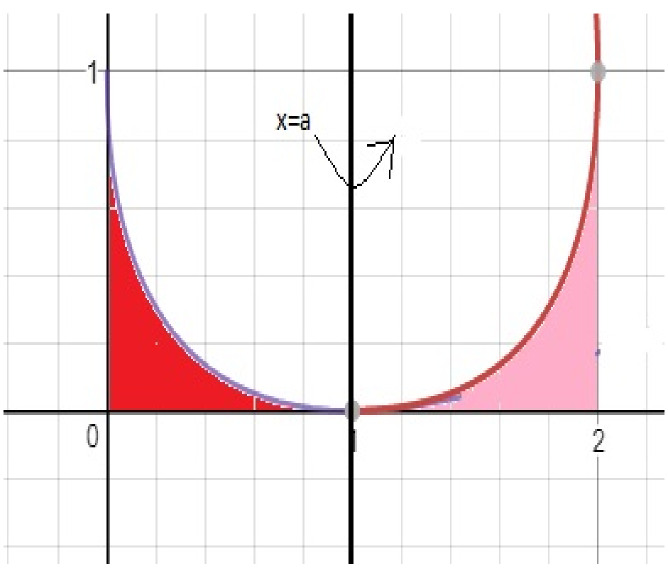
Método de discos

$$V = \pi \int_0^a \left(y - 2\sqrt{a}\sqrt{y} + a\right)^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^a (y^2 - 4\sqrt{a}y^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 6ay - 4a^{\frac{3}{2}}\sqrt{y} + a^2)dy$$

$$V = \pi\left(\frac{y^3}{3} - \frac{8a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}}}{5} + 3ay^2 - \frac{8a^{\left(\frac{3}{2}\right)}y^{\frac{3}{2}}}{3} + a^2y\right)$$

$$Evaluando \Rightarrow \boldsymbol{\frac{a^3\pi}{15} U^3}$$



c) la recta x = a

Método de capas

$$V = 2\pi \int_0^a (a - x)\left(x - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + a\right)dx \Rightarrow$$

$$2\pi \int_0^a ax - 2a^{\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}} + a^2 - x^2 + 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - ax)dx$$

$$V = 2\pi\left(-\frac{4a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} + a^2x - \frac{x^3}{3} + \frac{4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5}\right) Evaluando \Rightarrow \boldsymbol{\frac{4a^3\pi}{15} U^3}$$

Ejercicios para resolver por el estudiante

Instrucciones

A continuación encontrarás una serie de ejercicios y problemas para que resuelvas, de los problemas 1 al 10 aparecen recuadros, los cuales puedes usar para escribir tus propuestas de solución. Del ejercicio 11 al 24, puedes emplear hojas extra para escribir tus procesos de solución.

1) Hallar el área comprendida entre la función $y = x^2 - 6x$ y $y = 0$

2) Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones.

$y = x^3 - 3x^2 + 3x$ $\quad$ $y = x$

3) Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones.

$y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$

4) Calcular el volumen generado por una semionda de la sinusoide y = sen x, al girar alrededor del eje OX.

5) Encuentre el volumen de la región limitada por $y = x^2$ el eje x y la recta $x = 5$ alrededor del el eje y.

6) Calcular el volumen generado al girar alrededor del eje OX el área limitada por las gráficas de $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

7) Hallar el área comprendida entre las dos funciones siguientes:
$y = x^2 - 4x + 3$
$y = -x^2 + 2x + 3$

8) Hallar el área determinada por la función $y = 3(x^3 - x)$ y $y = 0$

9) Determinar el área comprendida entre las funciones $x = 4 - y^2$ **y** $x = y - 2$

10) Calcular el área comprendida entre $y = sec\, x$ **y** $y = 2$

11) Considere el segmento esférico de altura h y radio de la esfera r.

a) Calcula la longitud del arco de la curva que genera el segmento esférico.

b) Calcula el área de la superficie del segmento esférico.

12) Encuentre el área bajo la curva dada en el intervalo definido:

i) $y = e^x$ (-3,8)

ii) $y = x^5 - 2x^4 - 8x^3$ (-2,4)

13) Encuentre el área entre las curvas:

$$i)\ f(x) = x^2 \qquad g(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

14) Represente la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, muestre un rectángulo típico vertical u horizontal y calcule el área de la región: $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 4y$.

15). Se diseña un foco ornamental con la forma de una superficie de revolución obtenida al girar alrededor del eje X, la gráfica de $y = \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$, donde x e y se miden en metros. Calcule el área del foco.

16) Represente la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, muestre un rectángulo típico vertical u horizontal y calcule el área de la región.

$$x = 4y - y^3, \qquad x = 0$$

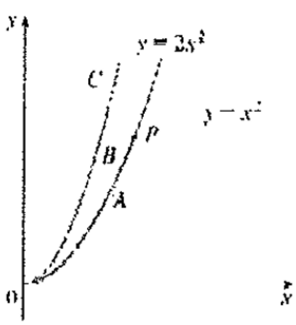
17) Dibuje la región definida por las curvas dadas. Decida si integra con respecto a x o a y. Trace un rectángulo de aproximación representativo e indique su altura y su anchura. Luego determine el área de la región.

$$y = \tan x, \;\; y = 2\sin x, -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

18) Calcule el área de la superficie de revolución generada a girar la función respecto del eje x, en el intervalo indicado:

$$y = \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad [0,8]$$

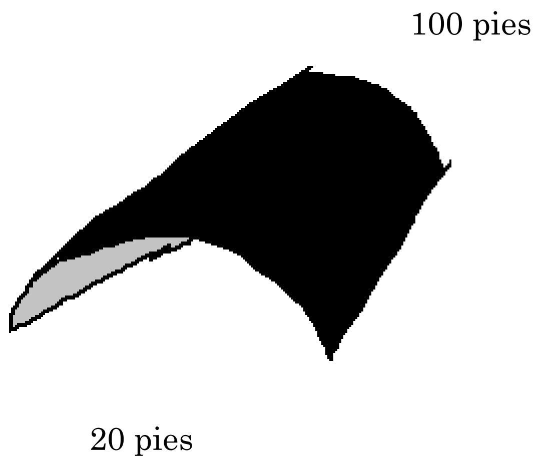
19) La figura muestra una curva C con la propiedad de que cualquier punto P en la curva de en medio $y = 2x^2$ las areas A y B son iguales. Encontrar una ecuacion para C.



20) El techo de la figura tiene 100 pies de largo, 40 de ancho y sus secciones son catenarias invertidas de ecuación:

$$y = 31 - 10\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{-\frac{x}{20}}\right)$$

Hallar el área en pies cuadrados de este techo.



21) Hallar el área de la región en el 1er, cuadrante que está acotada por la izquierda por el eje y, abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, por arriba a la izquierda por la curva $x = (y-1)^2$ y por arriba a la derecha por la recta $x = 3 - y$.

22) Hallar el área de la región en el 1er cuadrante que está acotada por la izquierda por el eje y, por abajo por la recta $y = \frac{x}{4}$, por arriba a la izquierda por la curva $y = 1 + \sqrt{x}$ y por arriba a la derecha por la curva $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

23) Halla el área de la superficie lateral del cono generado al girar el segmento de recta $y = \frac{x}{2}$, $0 \le x \le 4$, alrededor del eje y.

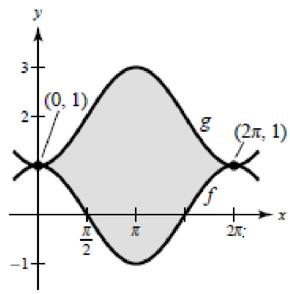
24) Mostrar que el área de la superficie de un cono circular recto de altura a y radio de la base b es $\pi b\sqrt{a^2 + b^2}$.

Examen muestra

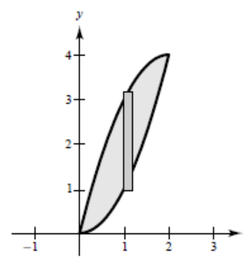
Ejercicio 1

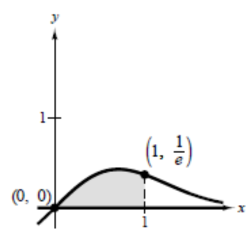
Identificar la región acotada por la gráfica de la función, y encontrar el área de la región.

F(x)=cos x, g(x)=2-cos x, 0<=x<=2π



a) A=12.56666
b) A=8 π
c) A=14



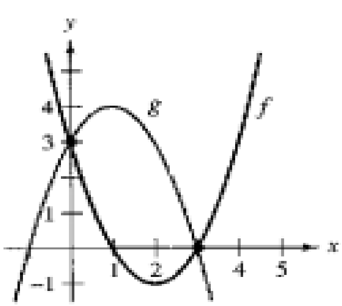


Ejercicio 2

Formular la integral que da el área de la región.

Y1=$x^2 - 4x + 3$

Y2=$-x^2 + 2x + 3$



a) A=$\int_0^2[(-x^2+2x+3)-(x^2-4x+3)]\,dx$=$\int_0^2(-2x^2+9x)dx$
b) A=$\int_0^3[(-x^2+2x+3)-(x^2-4x+3)]\,dx$=$\int_0^3(-2x^2+6x)dx$
c) A=$\int_0^1[(-x^2+2x+3)-(x^2-4x+3)]\,dx$=$\int_0^3(-x^2+x)dx$

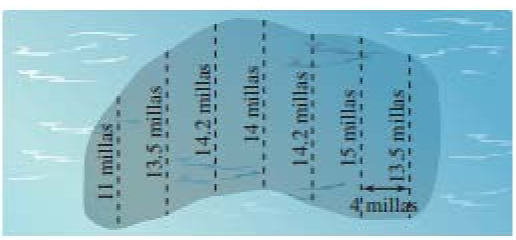
Ejercicio 3

Trazar la región acotada por las gráficas de las funciones algebraicas y encontrar el área de la región. $f(x) = x^2 + 2x$ $g(x) = x + 2$

a) $\frac{12}{5}u^2$
b) $\frac{17}{6}u^2$
c) $\frac{9}{2}u^2$
d) $5\,u^2$

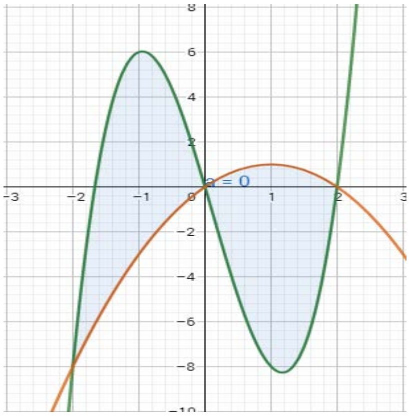
Ejercicio 4

Utilizando Regla de los Trapecios, hallar el área de la siguiente figura.



a) $200.5\,u^2$
b) $332.6\,u^2$
c) $458.8\,u^2$
d) $166.3\,u^2$

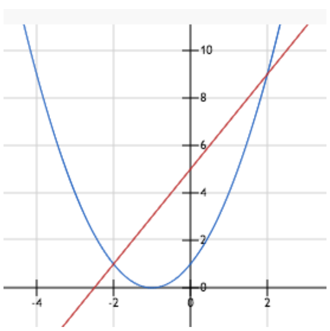
Ejercicio 5
Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.



Ejercicio 6

Formula y evalúa la integral definida que da el área de la región entre las curvas

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$
$$g(x) = 2x + 5$$



Ejercicio 7

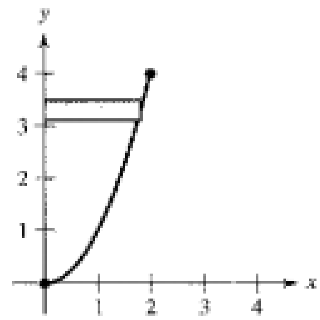
En el siguiente problema el integrando de la integral definida es una diferencia de dos funciones. dibujar la gráfica de cada función y sombrear la región cuya área estar representada por la integral.

A=$\int_{-1}^{1}((1-x^2)-(x^2-1))$dx

Ejercicio 8

Formular y evaluar la integral que da el volumen del solido formado al girar la región alrededor del eje y.

Y=x^2



a) b) c)

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^4 y \, dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

$$V = \pi \int_0^2 [(4x - x^2)^2 - x^4] \, dx$$

$$= \pi \int_0^2 (16x^2 - 8x^3) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{16}{3}x^3 - 2x^4 \right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}$$

$$V = \pi \int_0^2 [(6 - x^2)^2 - (6 - 4x + x^2)^2] \, dx$$

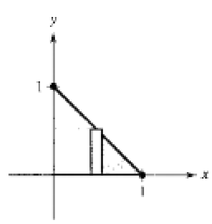
$$= 8\pi \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) \, dx$$

$$= 8\pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^2 = \frac{64\pi}{3}$$

Ejercicio 9

Formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido al girar la región alrededor del eje x.

Y=-x+1



$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_1^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^4 = \frac{15\pi}{2}$$ a)

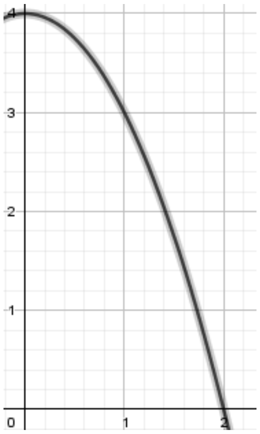
$$V = \pi \int_0^1 (-x + 1)^2 \, dx = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$ b)

c) $$V = \pi \int_0^1 [(x^2)^2 - (x^3)^2] \, dx = \pi \int_0^1 (x^4 - x^6) \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{35}$$

Ejercicio 10

Evaluar y encontrar el área bajo la región, si ésta gira alrededor del eje x cuando

$$y = 4 - x^2$$



a) $\frac{496\pi}{15}\ u^3$

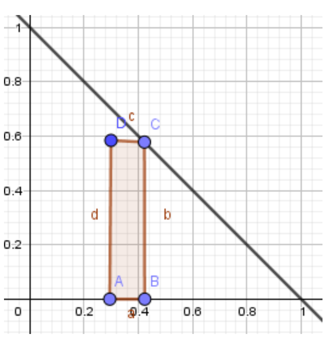
b) $\frac{500\pi}{35}\ u^3$

c) $30\pi\ u^3$

d) $\frac{12\pi}{17}\ u^3$

Ejercicio 11

Usando método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del solido generado al girar alrededor del eje y. $y = 1 - x$



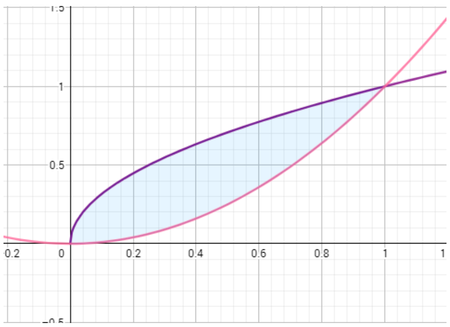
a) $\frac{\pi}{3}u^3$

b) $\frac{5\pi}{4}u^3$

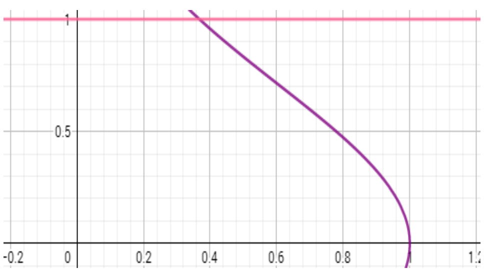
c) $\frac{\pi}{2}u^3$

d) πu^3

Ejercicio 12
Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ alrededor del eje x, como se muestra en la figura.

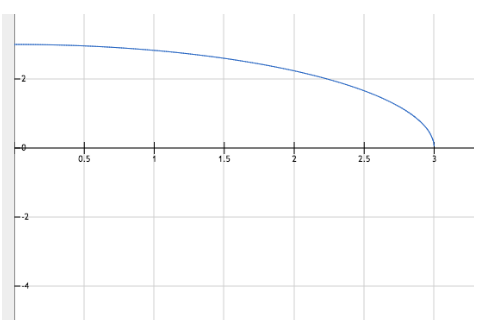


Ejercicio 13
Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica de $x = e^{-y^2}$ y el eje y $(0 \leq y \leq 1)$ alrededor del eje x.



Ejercicio 14
Formular y evaluar la integral que da el volumen del solido al girar la región alrededor del eje x

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$



Ejercicio 15

Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de la recta y=3

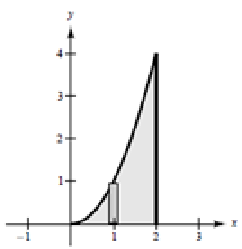
$y = 6 - 2x - x^2$,

$y = x + 6$

Ejercicio 16

Usar el método de capas para formular y evaluar la integral que el volumen del solido generado al girar la región plana alrededor del eje y.

Y=x^2, $y = 0$, $x = 2$



a) V=$\int_0^3 x^3 dx= \frac{x^4}{4} = 13\pi$

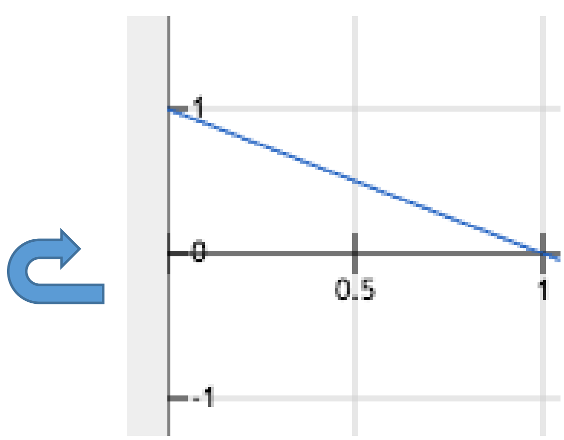
b) V=$\int_0^3 x^6 dx= \frac{x^4}{4} = 8$

c) V=$2\pi \int_0^3 x^3 dx= \frac{x^4}{4} = 8\pi$

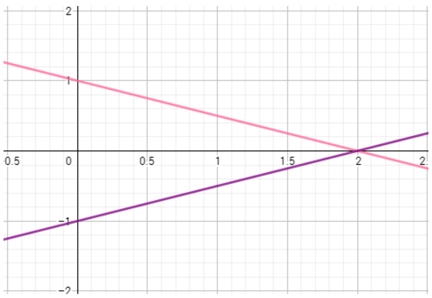
Ejercicio 17

Usar el método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor del eje y

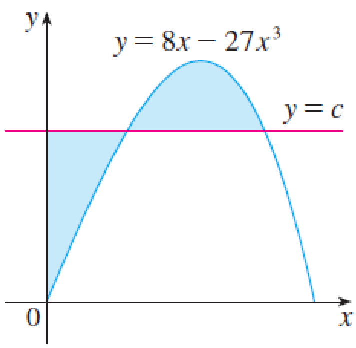
y=1-x



Ejercicio 18
Encontrar el volumen de una pirámide cuya base triangular está acotada por las rectas: $y = 1 - \frac{x}{2}$, $y = -1 + \frac{x}{2}$, $x = 0$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.



Ejercicio 19
En la figura se ilustra una recta horizontal y=c que corta la curva $\boldsymbol{y = 8x - 27x^3}$. Encuentre c tal que las áreas de las regiones sean iguales



Ejercicio 20
Calcule los valores de c tales que el área de la región delimitada por las parábolas $\boldsymbol{y = x^2 - C^2}$ y $\boldsymbol{y = C^2 - x^2}$ sea 576

Referencias Bibliográficas

[1] Ruiz, E.F; Gutiérrez, J.J; Carreto, C., "Estudio diagnóstico y propuesta de uso de una página web móvil para apoyar temas de Cálculo en el nivel superior", Sexta Conferencia Iberoamericana de Complejidad, Informática y Cibernética (CICIC 2016) - 11 de marzo de 2016, Orlando, Florida, EE.UU., pp. 22 – 27, 2016.

[2] F. Hitt, "The role of the external representations in the constructions of mathematical concepts", L'educazione Matemática, nº 5, pp. 205-227, 2003.

[3] O. Ducrot y T. Todorov, Diccionario enciclopédico de las Ciencias del Lenguaje, México: Siglo XXI, 1998.

[4] G. Monk, "A Study of Calculus Students' Constructions of Functional Situations: The Case of the Shadow Problem", de American Ed. Research Association, San Francisco, 1992.

[5] J. Bowers y H. Doerr, "An analysis of prospective teachers' dual roles in understanding the mathematics of change: electing growth with technology", de Journal of Mathematics Teacher Education, 2001.

[6] E. F. Ruiz Ledesma, «Registros de Representación con Apoyo de la Tecnología en la Resolución de Problemas de Cálculo,» de XXXVIII Conferencia Nacional de Ingeniería, México, 2011.

[7] M. Zandieh, "A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate". de Research in Collegiate Mathematics Education. IV, USA. 2000.

[8] J. Oliveros, "El estudio de la tasa de cambio instantánea en el entendimiento de la derivada situado en el salón de clases", Tesis Doctoral no publicada., CINVESTAV IPN, 1999.

[9] Stewart, J. Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Traducción. M. del C., Rodríguez. Séptima edición México: Cenage Learning

[10] Larson, R & Edwars, B. Cálculo 1 de una variable. Traducción J, Ibarra., A. Hernández., G, Nágore y N. A., Moreno. 9ª. Edición México: MacGrawHill.

Respuestas de los primeros 9 problemas

1) Máximo absoluto (4, 5)

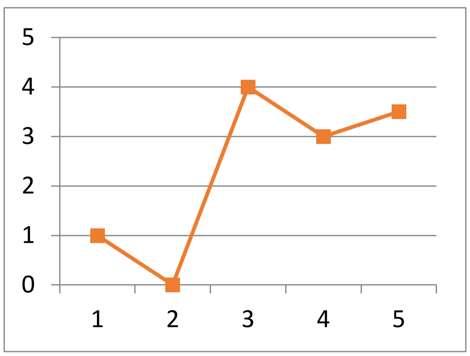
Mínimo absoluto (7, 1)

Máximos locales (1, 4) y (6, 4)

Mínimos locales (0, 2), (2, 2) y (5,3)

Dibuje una gráfica de una función *f* que sea continua sobre [1, 5] y tenga las propiedades dadas.

2) Mínimo absoluto en 2, máximo absoluto en 3, mínimo local en 4.



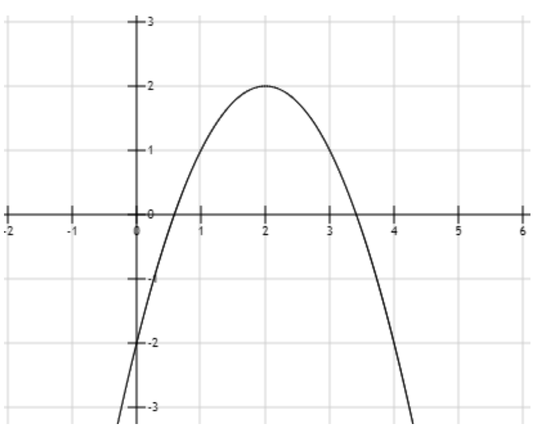
Máximo absoluto (3, 4)

Mínimo absoluto (2, 0)

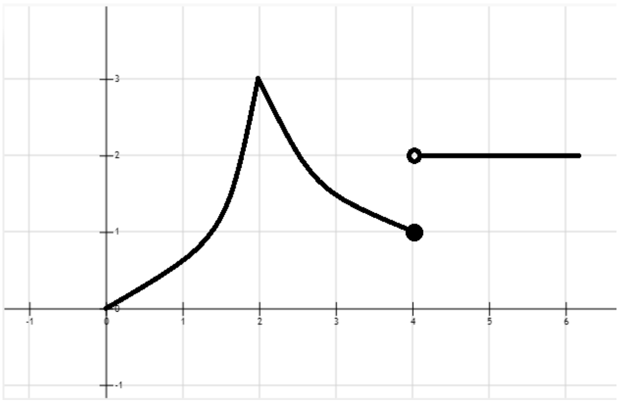
Máximo local (1, 1) y (5, 3.5)

Mínimo local (4, 3)

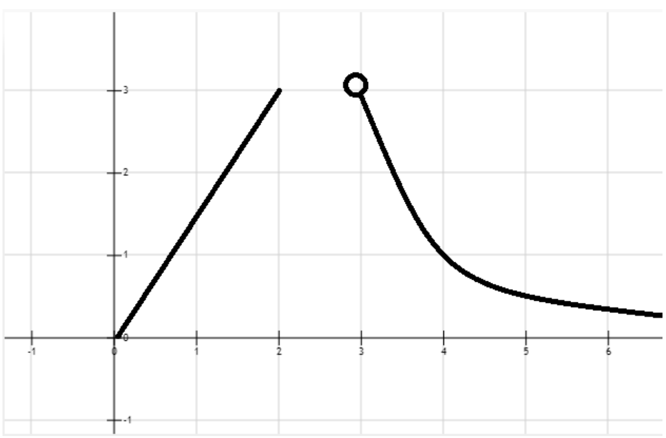
3) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y sea derivable



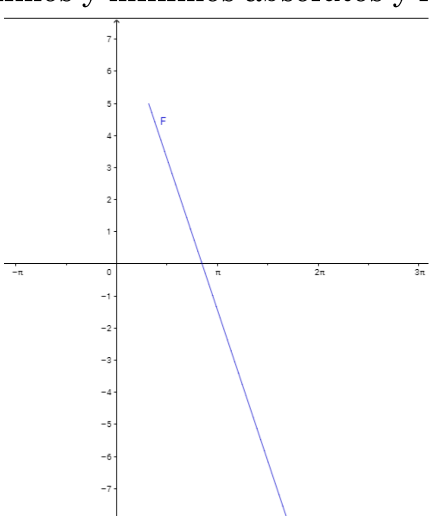
4) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea derivable en 2



5) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea continua en 2



6) Trace la gráfica de la función de f y use su boceto para encontrar los valores máximos y mínimos absolutos y locales de $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geq 1$



Punto máximo absoluto (1, 5)

Punto mínimo (∞, - ∞)

7.- $1.326\,\frac{m}{\text{min}}$

8) a) V= 2.85cm

b) Ea=0.02, Er=−0,0035, Ep=0,7%

9) Obtener los máximos y mínimos de f(x) = x3 − 3x + 2

Máximo(−1, 4) Mínimo(1, 0)